RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

ANNUNZIO.

Per ogni Nota o Memoria, presentata in una sola adunanza del Circolo, la quale sorpassi le 16 pagine di stampa, rimane a carico dell'Autore la *spesa di composizione* delle pagine eccedenti, in ragione di L. 3, 15 per ogni pagina o parte di essa.

Gli Autori che desiderano *Estratti* delle Note e Memorie inserite nei Rendiconti, sono vivamente pregati di avvertirne la Redazione nell'atto di rinviare le prove di stampa. A fine di agevolare i soci nella pubblicazione dei loro lavori, gli estratti saranno ad essi mandati a mano a mano che procede la stampa del fascicolo.

Il prezzo degli estratti è regolato come segue:

Per un foglio di 8 pagine, o meno:

50 esemplari = L. 5; 100 = L. 7, 75; 150 = L. 11; 200 = L. 13, 75; 250 = L. 17; 300 = L. 20, 25; 350 = L. 23, 50; 400 = L. 26, 75.

Per ogni foglio successivo di pagine 8, o parte di esso (oltre la spesa di composizione, come sopra, per le pagine eccedenti i due fogli di stampa):

50 esemplari = L. 3, 75; 100 = L. 5, 25; 150 = L. 7, 25; 200 = L. 8, 75; 250 = L. 10, 75; 300 = L. 12, 75; 350 = L. 14, 75; 400 = L. 16, 75.

Le figure intercalate nel testo ovvero in tavole separate sono a carico degli Autori.

REDAZIONE: 28, via Ruggiero Settimo — Palermo.

Tipografia Matematica, 11, via Villareale, Palermo.

Proto-Compositore: GAETANO SENATORE.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO XIV. — ANNO 1900.

PARTE PRIMA: MEMORIE E COMUNICAZIONI.

PALERMO,

SEDE DELLA SOCIETÀ

28, via Ruggiero Settimo, 28.

1900

CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

(Società fondata nel 1884).

STATUTO DELLA SOCIETÀ

discusso ed approvato dall'Assemblea generale dei soci del dì 26 febbrajo 1888.

Scopo della Società. — Sede.

Art. 1. — La società scientifica *Circolo Matematico di Palermo* ha per iscopo l'incremento e la diffusione delle scienze matematiche in Italia.

Art. 2. — A tal fine, il Circolo:

a) Tiene adunanze nella sua sede.

b) Pubblica una rivista periodica di matematica col titolo: *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

Potrà inoltre istituire concorsi a premi e farsi promotore di congressi scientifici nelle varie città del Regno.

Art. 3. — La sede della Società è in Palermo, ed è inamovibile.

Dei Soci. — Ammissione. — Contribuzioni.

Art. 4. — Il Circolo si compone di due categorie di soci: *residenti* e *non residenti.* Nella prima si comprendono coloro che hanno in Palermo dimora abituale.

Gli stranieri possono far parte della società.

Art. 5. — Il numero dei soci *residenti* e *non residenti* è illimitato.

Art. 6. — Per l'ammissione al Circolo è necessario: 1° Essere proposto, in una adunanza, da due soci (residenti o non residenti) mediante domanda, per iscritto, al Presidente; 2° ottenere, nell'adunanza seguente, i suffragi della maggioranza dei soci presenti.

Art. 7. — Ogni socio *residente* è tenuto al pagamento: 1° di una *tassa d'entrata* di L. 10, da pagarsi all'atto dell'ammissione; 2° di una *contribuzione annua* di L. 15, da pagarsi a quadrimestri anticipati, al 1° gennajo, al 1° maggio ed al 1° settembre di ogni anno. Il nuovo ammesso comincerà a pagare dal principio dell'anno in corso.

Art. 8. — Ogni socio *non residente* è tenuto al pagamento della sola *contribu-*

zione annua di L. 15, da versarsi, anticipatamente, al 1° gennajo di ogni anno. Il nuovo ammesso comincerà a pagare dall'anno in corso.

Art. 9. — Le dimissioni da socio del Circolo non sono valide se il dimissionario non abbia soddisfatto l'intera contribuzione annua. Esse dovranno essere dirette al Presidente che ne darà partecipazione alla Società nell'adunanza più vicina.

Chi si è dimesso può, dietro domanda da lui sottoscritta, rientrare nella Società, mediante la votazione di cui all'Art. 6.

Art. 10. — Il socio moroso, trascorsi 6 mesi dall'epoca stabilita per il pagamento, sarà, dietro avvertimento preventivo del tesoriere, radiato dall'elenco dei soci.

Art. 11. — Il versamento, in unica volta, di L. 300 conferisce il titolo di *socio perpetuo,* ed esonera dal pagamento della contribuzione annua. In caso di scioglimento della Società non si ha alcun diritto a rimborso.

Art. 12. — Il socio residente, per il fatto del trasferimento della sua dimora abituale, è ascritto fra i non residenti, senza poter ripetere il rimborso della tassa di entrata. È tenuto al pagamento della medesima il socio non residente che acquista, per la prima volta, la qualità di residente.

Art. 13. — Tutti i soci, residenti e non residenti, riceveranno gratuitamente i *Rendiconti* del Circolo. Ogni nuovo ammesso ha diritto al volume in corso di stampa all'epoca della sua ammissione.

Dell'Ufficio di Presidenza.

Art. 14. — La rappresentanza e la direzione amministrativa della Società spetta all'*Ufficio di Presidenza,* costituito dagli ufficiali della Società:

1 presidente,
1 vice-presidente,
2 segretari,
2 vice-segretari,
1 tesoriere,
2 bibliotecari,

eletti dai soci residenti, nel proprio seno, a scrutinio segreto.

L'Ufficio di Presidenza rimane in carica due anni. Tutti i suoi membri sono rieliggibili.

Art. 15. — Per l'elezione dell'Ufficio di Presidenza si terrà apposita adunanza straordinaria nella 1ª domenica di gennajo. Prendono parte alla votazione soltanto i soci presenti.

Ove durante il biennio rimanga vacante una carica dell'Ufficio di Presidenza, i soci residenti saranno convocati in apposita adunanza straordinaria per l'elezione del titolare.

Del Consiglio Direttivo.

Art. 16. — La direzione scientifica della Società è affidata ad un *Consiglio Direttivo,* il quale funziona da comitato di redazione della rivista periodica « *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* », secondo le norme di un suo regolamento interno.

Art. 17. — Il Consiglio Direttivo è composto di 20 membri, 5 residenti e 15 non residenti, eletti dall'intera società a scrutinio segreto. In ognuna delle due categorie risultano eletti i soci che riportano maggior numero di voti. Qualora l'elezione, per parità di voti, riuscisse indecisa fra due o più candidati, si procederà a votazioni di ballottaggio, alle quali prenderanno parte soltanto i soci presenti all'adunanza.

Il Consiglio Direttivo rimane in carica tre anni. Tutti i suoi membri sono rieliggibili.

Art. 18. — Per l'elezione del Consiglio Direttivo si terrà apposita adunanza straordinaria nella terza domenica di gennajo.

Ogni socio non residente, come ogni socio residente che non possa intervenire alla detta adunanza, invierà, in una lettera da lui sottoscritta e diretta al Presidente, una scheda chiusa e suggellata indicante 20 nomi di soci, dei quali: 5 residenti e 15 non residenti.

Saranno considerate nulle le schede che non soddisfano a tutte le condizioni sopra stabilite o che pervengano all'Ufficio di Presidenza dopo le ore 3 pomeridiane del suindicato giorno.

Lo spoglio delle schede sarà fatto dal Presidente assistito dai segretari.

Art. 19. — Non vi è incompatibilità di carica fra i membri dell'Ufficio di Presidenza ed i membri residenti del Consiglio Direttivo.

Art. 20. — Entrando in carica, il Consiglio Direttivo delegherà uno dei suoi membri residenti a dirigere la pubblicazione dei *Rendiconti*.

Delle adunanze.

Art. 21. — Le adunanze ordinarie del Circolo si terranno la seconda e la quarta domenica del mese. La società prende due mesi di vacanza: settembre ed ottobre. Il Presidente, ove lo reputi opportuno, può, in ogni tempo, convocare i soci residenti in adunanza straordinaria.

Art. 22. — Nelle adunanze, in caso di assenza del Presidente e del Vice Presidente, il più anziano di età fra i soci presenti funzionerà da Presidente. In caso di assenza dei Segretari e dei Vice Segretari, chi presiede, inviterà uno dei soci presenti a farne le veci.

Art. 23. — Entro il mese di gennajo, di ogni anno, il Presidente convocherà i soci residenti in apposita adunanza straordinaria per la revisione dei conti dell'anno decorso e l'approvazione del bilancio di previsione.

Art. 24. — Nelle adunanze del Circolo non è ammessa alcuna comunicazione o discussione sòpra argomenti estranei all'indole scientifica e allo scopo della Società.

Art. 25. — Tutto ciò che riferiscesi all'amministrazione del Circolo, può essere trattato, esclusivamente, nelle adunanze straordinarie, per le quali il Presidente formulerà e parteciperà, con precedenza, ai soci residenti, apposito ordine del giorno.

Art. 26. — Le dimissioni da socio del Circolo non possono essere oggetto di discussione nè di votazione.

Art. 27. — Nelle adunanze ordinarie il Circolo è legalmente costituito qualunque sia il numero dei soci presenti.

Nelle adunanze straordinarie, tranne quelle di cui agli Art. 15 e 18, è necessaria una seconda convocazione quando nella prima non sia intervenuta almeno la metà più uno dei soci residenti.

Art. 28. — Nelle adunanze ordinarie le Comunicazioni dei soci residenti si succedono per ordine d'iscrizione. Saranno precedute dalla lettura che farà il Segretario dei titoli delle Comunicazioni dei soci non residenti, pervenute all'Ufficio di Presidenza nell'intervallo tra un'adunanza e l'altra.

Art. 29. — Rientra nelle speciali attribuzioni del Presidente tutto ciò che riferiscesi al regolamento delle adunanze ordinarie e straordinarie.

Art. 30. — I soci non residenti che si trovino temporaneamente in Palermo godono tutti i diritti dei residenti e partecipano alle votazioni, meno quelle di cui agli Art. 15, 23 e 45.

Art. 31. — Le persone estranee che desiderano assistere alle adunanze ordinarie del Circolo, debbono, ciascuna volta, essere introdotte da uno dei soci.

Dei Rendioonti.

Art. 32. — Nei *Rendiconti* del Circolo si pubblicano, per obbligo:

1° Gli *Estratti dai verbali* delle adunanze (redatti dai Segretari), i quali contengono il titolo e, ove occorra, un breve cenno, delle comunicazione dei soci.

2° Le Note e le Memorie originali comunicati dai soci ed accettate per la stampa dal Comitato di redazione.

3° Un bollettino bibliografico della produzione matematica nazionale e straniera, il quale comprende:

a) il sommario degli articoli di matematica contenuti nelle pubblicazioni *periodiche* (atti di Accademie, riviste, giornali, ecc.) colle quali il Circolo scambia i suoi *Rendiconti;*

b) l'elenco delle pubblicazioni di matematica *non periodiche* (opere, memorie, note, etc.) che pervengono in dono alla Biblioteca del Circolo.

Art. 33. — Per tutto che concerne la rivista *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* il Consiglio Direttivo potrà attuare quelle riforme ed estensioni che stimerà opportune per accrescerne l'importanza scientifica e meglio soddisfare alle esigenze dei cultori delle scienze matematiche.

Art. 34. — Gli *Estratti dai verbali* non riproducono le discussioni scientifiche che si fanno nelle adunanze del Circolo; tuttavia se i soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a rimettere al Segretario, nell'adunanza istessa, una Nota per iscritto, la quale, in ogni caso, non potrà eccedere lo spazio di una pagina dei *Rendiconti.*

Art. 35. — Le Note, Memorie e Riviste bibliografiche destinate ai *Rendiconti* dovranno essere inedite e scritte in una delle seguenti lingue: italiana, latina, spagnuola, francese, tedesca, inglese; non potranno pubblicarsi a parte o inserirsi in altri periodici scientifici se non dopo che saranno state pubblicate dal Circolo. Gli Autori ne assumono, essi soli, la responsabilità scientifica.

Delle adunanze.

Art. 36. — Il Circolo forma una Biblioteca e scambia i suoi *Rendiconti* colle raccolte scientifiche, nazionali e straniere.

Art. 37. — I libri, gli opuscoli e le raccolte periodiche acquistati o ricevuti in dono, o in cambio dei *Rendiconti,* restano di proprietà esclusiva del Circolo; in caso di scioglimento della Società passano di pien diritto alla Biblioteca Comunale di Palermo.

Art. 38. — Il regolamento speciale della Biblioteca, approvato dai soci residenti, potrà stabilire le norme per accordare a domicilio, a' soci residenti e non residenti, l'uso temporaneo degli opuscoli scientifici.

Art. 39. — Sui fondi provenienti dalle contribuzioni annue dei soci, non può essere stanziata alcuna somma per la Biblioteca.

Delle entrate e delle spese.

Art. 40. — Le entrate del Circolo sono:

1° le contribuzioni dei soci;

2° il prodotto della vendita dei *Rendiconti;*

3° i sussidii e doni che il Circolo potrà ricevere da privati o da enti morali.

Art. 41. — Le spese del Circolo si dividono in ordinarie e straordinarie. Le spese ordinarie sono:

1° le spese d'ufficio, inclusavi l'annua pigione del locale per la sede del Circolo;

2° le spese di stampa e spedizione dei *Rendiconti.*

Per ogni spesa straordinaria è necessaria deliberazione dell'assemblea dei soci residenti.

Art. 42. — Il Tesoriere ha la gestione economica degli affari sociali, tanto attivi che passivi, impiega i fondi disponibili, provvede alle spese ordinarie ed a quelle straordinarie votate dall'assemblea dei soci residenti.

Art. 43. — Rimangono abrogati tutti gli articoli dello Statuto provvisorio del 2 marzo 1884.

Art. 44. — Qualunque proposta per aggiunta o modificazione al presente Statuto dovrà essere sottoscritta da almeno 30 soci ed approvata dalla Società colla maggioranza di almeno $^2/_3$ dei votanti.

Art. 45. — Nel caso di scioglimento della Società, l'assemblea generale dei soci residenti, coll'intervento di almeno $^2/_3$ dei medesimi, delibererà sulla destinazione dei fondi rimasti disponibili.

Articolo transitorio. — Le prime elezioni per l'Ufficio di Presidenza e pel Consiglio Direttivo saranno fatte dall'Assemblea dei soci residenti, convocati in apposita adunanza straordinaria.

UFFICIO DI PRESIDENZA

PEL BIENNIO 1900-1901.

Caldarera, presidente. — **Maisano**, vice presidente. — **Gerbaldi** e **Guccia**, segretari. — **de Franchis** e **Pepoli**, vice segretari. — **Porcelli**, tesoriere.

CONSIGLIO DIRETTIVO

(Comitato di redazione dei *Rendiconti*)

PEL TRIENNIO 1900-1901-1902.

Residenti: **Albeggiani**, **Gebbia**, **Gerbaldi**, **Guccia**, **Torelli**.

Non residenti: **Bianchi** (Pisa), **Capelli** (Napoli), **Cerruti** (Roma), **Cremona** (Roma), **Del Pezzo** (Napoli), **Del Re** (Napoli), **Loria** (Genova), **Mittag-Leffler** (Stoccolma), **Pascal** (Pavia), **Peano** (Torino), **Pincherle** (Bologna), **Poincaré** (Parigi), **Tonelli** (Roma), **Volterra** (Torino), N. N.

Delegato dal Consiglio per dirigere la pubblicazione dei *Rendiconti* (Art. 20 dello Statuto): **Guccia**.

EFFEMERIDE DELLE ADUNANZE ORDINARIE PEL 1900.

Gennajo	14, 28	Luglio	8, 22
Febbrajo	11, 25	Agosto	12, 26
Marzo	11, 25	Settembre	vacanze
Aprile	8, 22	Ottobre	vacanze
Maggio	13, 27	Novembre	11, 25
Giugno	10, 24	Dicembre	9, 23.

ELENCO DEI SOCI

(5 APRILE 1900)

[**S. P.**] = Socio perpetuo (*Articolo 11 dello Statuto*).

RESIDENTI.

DATA DELLA NOMINA.

1893, 22 gennajo. **Agnello** Francesco [Girgenti: 24. 6. 1866], ingegnere. — *Piazza Stazione, 2, Palazzo Messina.*

1884, 2 marzo. **Alagna** Rosario [Partanna (Prov. di Trapani): 12. 7. 1853], ingegnere, prof. nel R. Istituto Margherita in Palermo. — *Via Celso, 66.*

1884, 2 marzo. **Albeggiani** Michele Luigi [Palermo: 7. 3. 1852], ingegnere, corrispondente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; libero docente di Geometria analitica nella R. Università; inc. di Stereotomia nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri e prof. di Matematica nel R. Istituto Tecnico di Palermo. — *Salita Banditore, 4.*

1898, 27 novembre. **Angelitti** Filippo [Ajelli (Aquila): 1. 5. 1856], ingegnere, dottore in Matematica, socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli, socio corrispondente della R. Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, socio ordinario della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; prof. straord. di Astronomia nella R. Università e direttore del R. Osservavatorio Astronomico di Palermo. — *R. Osservatorio Astronomico, Palazzo Reale.*

1889, 22 dicembre. **Bagnera** Giuseppe [Bagheria (Prov. di Palermo): 14. 11. 1865], ingegnere, dottore in Matematica, libero docente di Analisi algebrica nella R. Università di Palermo; insegnante di Matematica nel R. Educatorio Maria Adelaide di Palermo. — *Via Rosina Muzio Salvo, 44.*

1888, 26 agosto. **Basile** Ernesto [Palermo: 31. 1. 1857], architetto, accademico di merito della Romana Accademia di Belle Arti di S. Luca, socio onorario della Reali Accademie di Belle Arti di Milano,

DATA DELLA NOMINA.

di Bologna, di Carrara e di Venezia; socio corrispondente della R. Accademia Raffaello in Urbino; prof. onorario del R. Istituto di Belle Arti di Napoli; socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; socio corrispondente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; direttore dei lavori del Teatro Massimo di Palermo; direttore e professore di Architettura del R. Istituto di Belle Arti in Palermo; membro della Giunta superiore di Belle Arti; prof. ord. di Architettura tecnica nella R. Suola d'applicazione per gl'Ingegneri di Palermo. — *Via Villafranca, 46.*

1884, 2 marzo. **Bontade** Giovanni [Palermo: 27. 4. 1857], ingegnere. — *Corso Scinà, 180.*

1889, 24 marzo. **Bottino** Francesco [Palermo: 14. 8. 1855], ingegnere civile, ingegnere di Miniere di Zolfo; prof. di Matematica nel R. Ginnasio Giovanni Meli; assistente al Gabinetto di Costruzioni nel R. Istituto Tecnico di Palermo. — *Via Villarosa, 12.*

1899, 10 dicembre. **Calapso** Pasquale [Carini: 12. 4. 1872]. — *Via XII Gennajo, Palazzo Maggiore-Perni.*

1884, 2 marzo. **Caldarera** Francesco [Randazzo (Prov. di Catania): 5. 5. 1825], socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, socio ordinario della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo, membro della Società Matematica di Francia; socio corrispondente dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia Gioenia di Catania, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena e della R. Accademia di Padova, dell'Associazione « Mathesis » d'Italia; presidente del Circolo Matematico di Palermo; prof. ord. di Meccanica razionale nella R. Università di Palermo. — *Via Libertà, Palazzo Giampaolo.*

1888, 14 ottobre. **Certo** Luigi [Napoli: 19. 12. 1855], dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo Vittorio Emanuele di Palermo. — *Via Salvatore Meccio, 1.*

1896, 27 dicembre. **Conoscente** Euplio [Petralia Sottana: 30. 9. 1874], dottore in Matematica. — *Via Villareale, 11.*

1885, 8 febbrajo. **Conti** Ignazio, dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico di Palermo. — *R. Istituto Tecnico.*

1897, 27 giugno. **Correnti** Vincenzo [Vallelunga (Prov. di Caltanissetta): 15 11. 1871], dottore in Matematica. — *Via Cassari, 19.*

1895, 13 gennajo. **De Franchis** Michele [Palermo: 6. 4. 1875], dottore in Matematica, libero docente di Geometria analitica e projettiva, assistente alla cattedra di Geometria analitica e projettiva ed assistente alla cattedra di Geometria superiore nella R. Università di Palermo. — *Via Torrearsa, 20.*

DATA DELLA NOMINA.

1885, 25 gennajo. **Di Simone** Guglielmo [Palermo: 7. 9. 1862], ingegnere.—*Via Principe Scordia, 11.*

1899, 15 gennajo. **Fazzari** Gaetano [Tropea: 6. 10. 1856], dottore in Matematica, direttore del *Pitagora*, prof. nel R. Liceo Umberto I° di Palermo. — *Vicolo Chiuso al Corso Olivuzza, 10.*

1884, 2 marzo. **Gebbia** Michele [Palermo: 7. 2. 1854], membro della Società Matematica di Francia, libero docente di Meccanica razionale nella R. Università ed inc. di Statica grafica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Palermo. — *Piazza Bologni, 23.*

1887, 27 luglio. **Gerbaldi** Francesco [Spezia (Prov. di Genova): 29. 7. 1858], dottore in Matematica, membro della Società Matematica di Francia e della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; segretario del Comitato Italiano pel « Repertorio Bibliografico delle Scienze Matematiche »; prof ord. di Geometria analitica e projettiva ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Palermo. — *Via Gaetano Daita, 11.*

1884, 2 marzo. **Guccia** Giovanni Battista [Palermo: 21. 10. 1855] [**S. P.**], dottore in Matematica, socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, corrispondente della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Società Filomatica di Parigi e della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; membro della Società Matematica di Francia e dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze; membro della Commissione permanente internazionale pel « Repertorio Bibliografico delle Scienze Matematiche »; direttore dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo;* prof. ord. di Geometria superiore nella R. Università di Palermo. — *Via Ruggiero Settimo, 28.*

1899, 15 gennajo. **Guerra** Ester Paolo [Palermo: 16. 1. 1871], ingegnere, insegnante di Matematica nella Scuola Normale dell'Educatorio Whitaker. — *Via Bosco, 10.*

1900, 11 febbrajo. **Guggino** Francesco [Bivona (Prov. di Girgenti): 8. 8. 1877], licenziato in Scienze Fisiche e Matematiche.—*Via Spirito Santo, 11, p° 2°.*

1887, 13 febbrajo. **La Manna** Domenico [Palermo: 2. 5. 1856], ingegnere. — *Via Polacchi, 76.*

1887, 16 gennajo. **La Mensa** Giovanni [Palermo: 13. 1. 1847], ingegnere, prof. di Costruzioni, Disegno relativo e Geometria descrittiva nel R. Istituto Tecnico di Palermo. — *Via Rosolino Pilo, 14.*

1890, 22 giugno. **Lanza** Giuseppe, conte di Mazzarino [Palermo: 6. 3. 1866], membro della Società Siciliana per la Storia Patria. — *Via Macqueda, Palazzo Mazzarino.*

DATA DELLA NOMINA.

1900, 21 gennajo. **Lugaro** Enrico [Palermo: 2. 12. 1876]. — *Via Villafranca, 44.*

1886, 18 aprile. **Macaluso** Damiano [Palermo: 27. 4. 1845], ingegnere, socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, socio ord. della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo, socio corrispondente dell'Accademia Gioenia di Catania; prof. ord. di Fisica sperimentale ed inc. di un corso di Fisica elementare pei farmacisti nella R. Università di Palermo. — *R. Università.*

1884, 2 marzo. **Maisano** Giovanni [Mezzoiuso (Prov. di Palermo): 23. 5. 1852], dottore in Scienze Fisico-Chimiche, dottore in Matematica, socio ordinario della R. Accademia Peloritana di Scienze, Lettere e Belle Arti di Messina; prof. ord. di Algebra nella R. Università di Palermo. — *Via Macqueda, 80, p° 3°.*

1892, 28 febbrajo. **Miceli** Lorenzo [Senise (Prov. di Potenza): 21. 2. 1861], dottore in Matematica. — *Via Sammartino, 33, p° 1°.*

1884, 2 marzo. **Paternò** Francesco Paolo [Novi Ligure (Prov. d'Alessandria): 11. 5. 1852], ingegnere-architetto, prof. straord. di Geometria descrittiva con disegno nella R. Università e prof. di Matematica nel R. Istituto Tecnico di Palermo. — *Piazza 13 Vittime, 18.*

1884, 2 marzo. **Pepoli** Alessandro [Palermo: 17. 3. 1852], ingegnere, prof. nella R. Scuola Tecnica Gagini. — *Via Isidoro La Lumia, 71.*

1884, 2 marzo. **Pintacuda** Carlo [Palermo: 8. 12. 1837], ingegnere, socio corrispondente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo. — *Via Ingham, 18.*

1884, 2 marzo. **Politi** Giuseppe [Palermo: 4. 8. 1852], ingegnere presso la Società Italiana per le Strade Ferrate della Sicilia. — *Via Pergole, 14.*

1884, 2 marzo. **Porcelli** Salvatore [Palermo: 16. 11. 1843], ingegnere. — *Via Filippo Parlatore, casa Porcelli.*

1896, 27 dicembre. **Saladino** Domenico [Palermo: 30. 5. 1857], ingegnere. — *Via Oreto, 28.*

1892, 3 gennajo. **Soler Balsano** Emanuele [Palermo: 29. 8. 1867], ingegnere, dottore in Matematica, socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti e della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; libero docente di Geodesia e assistente al gabinetto di Geodesia nella R. Università di Palermo. — *Via Principe Scordia, 57.*

1899, 26 marzo. **Tagliarini** Rodolfo [Palermo: 17. 3. 1871]. — *Via S. Basilio, 42.*

1888, 24 giugno. **Torelli** Gabriele [Napoli: 26. 3. 1849], dottore in Matematica, socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli, socio corrispondente della R. Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli e della Società di Scienze Naturali ed Eco-

DATA DELLA NOMINA.

nomiche di Palermo; prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Fisica matematica nella R. Università di Palermo. — *Via Malaspina, 42.*

1888, 5 febbrajo. **Venturi** Adolfo [Firenze: 22. 9. 1852], dottore in Matematica, socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti e socio ord. della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; rettore ff., preside della Facoltà Matematica, e prof. ord. di Geodesia teoretica ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Palermo. — *Via Cuba, 29.*

1894, 14 gennajo. **Viola** Achille, ingegnere. — *Via Cappuccini, 9.*

1886, 7 febbrajo. **Zona** Temistocle [Porto Tolle (Prov. di Rovigo): 7. 5. 1848], socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo e della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; libero docente di Astronomia e prof. straord. di Geografia fisica nella R. Università di Palermo. — *Osservatorio Astronomico, Palazzo Reale.*

NON RESIDENTI.

DATA DELLA NOMINA.

1899, 12 marzo. **Almansi** Emilio [Firenze: 15. 4. 1869], ingegnere, dottore in Matematica, libero docente di Meccanica razionale nella R. Università di Torino. — *Borgo la Croce, 34 — Firenze.*

1894, 8 aprile. **Amanzio** Domenico [Marano (Prov. di Napoli): 2. 2. 1854], dottore in Matematica; socio dell'Accademia Pontaniana, libero docente di Algebra complementare nella R. Università di Napoli; prof. nel R. Collegio Militare e nel R. Istituto Tecnico di Napoli. — *Via Chiatamone, 26 — Napoli.*

1894, 11 marzo. **Amici** Nicola [Acquasanta (Prov. di Ascoli Piceno): 21. 10. 1866], dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico di Macerata. — *R. Istituto Tecnico — Macerata.*

1887, 7 aprile. **Amodeo** Federico [Avellino: 8. 10. 1859], dottore in Matematica, libero docente in Geometria projettiva e coadiutore alle cattedre di Calcolo infinitesimale e Algebra complementare nella R. Università di Napoli; prof. nel R. Istituto Tecnico G. B. della Porta. — *Vomero, via Scarlatti, 32 — Napoli.*

DATA DELLA NOMINA.

1890, 23 marzo. **André** Désiré [Lyon: 29. 3. 1840], già allievo della Scuola Normale Superiore di Parigi, aggregato dell'Università, dottore in Scienze Matematiche, membro onorario e già presidente della Società Filomatica di Parigi, membro e già presidente della Società Matematica di Francia; membro della Commissione permanente internazionale pel « Repertorio Bibliografico delle Scienze Matematiche »; prof. di Matematiche speciali nel collegio « Stanislas ». — *Rue Bonaparte, 70^bis — Paris.*

1891, 12 aprile. **Appell** Paul [Strasbourg: 27. 9. 1855], membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, sezione di Geometria), già presidente della Società Matematica di Francia; prof. alla Facoltà delle Scienze di Parigi. — *Rue de Noailles, 23 — St.-Germain-en-Laye (Seine et Oise, France).*

1888, 11 marzo. **Arzelà** Cesare, dottore in Matematica, membro della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, corrispondente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Bologna. — *R. Università — Bologna.*

1896, 26 gennajo. **Autonne** Léon [Odessa (Russia): 28. 7. 1859], già allievo della Scuola Politecnica di Parigi, ingegnere di Ponti e Strade, dottore in Scienze matematiche; laureato dell'Istituto di Francia; membro della Società Matematica di Francia: « maître de conférences » nella Facoltà di Scienze di Lione. — *Rue Montbernard, 9 — Lyon (Rhône, France).*

1899, 12 febbrajo. **Barak** K. A., direttore della « Kaiserl. Universitäts-und Landes-Bibliothek ». — *Kaiserl. Universitäts-und Landes-Bibliothek — Strassburg (Germania).*

1888, 4 marzo. **Bertini** Eugenio [Forlì: 8. 11. 1846], dottore in Matematica, membro libero del R. Istituto Lombardo, socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia delle Scienze di Torino; prof. onorario della R. Università di Pavia; prof. ord. di Geometria superiore ed inc. di Geometria projettiva e descrittiva con disegno nella R. Università di Pisa. — *R. Università — Pisa.*

1887, 4 dicembre. **Berzolari** Luigi [Napoli: 1. 5. 1863], dottore in Matematica; prof. ord. di Algebra complementare e Geometria analitica, e incaricato di Statica grafica, nella R. Università di Pavia. — *R. Università — Pavia.*

1893, 24 dicembre. **Bianchi** Luigi [Parma: 18. 1. 1856], dottore in Matematica, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia delle Scienze di Torino, accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, della R. Accademia di Scienze

DATA DELLA NOMINA.

Fisiche e Matematiche di Napoli e del R. Istituto Lombardo; prof. ord. di Geometria analitica ed inc. di Matematiche superiori nella R. Università di Pisa. — *R. Università — Pisa.*

1896, 5 gennajo. **Blaserna** Pietro [Fiumicello presso Aquileja (Friuli): 29. 2. 1836], senatore del Regno, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, membro e segretario della R. Accademia dei Lincei, membro d'onore della R. Accademia di S. Cecilia e di quella di S. Luca, della Società di Fisica di Ginevra, della Società Elvetica delle Scienze, dell'Ateneo di Bergamo; corrispondente delle RR. Accademie di Torino, Napoli, Bologna e del R. Istituto Veneto; socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, dottore (honoris causa) di medicina nella R. Università di Königsberg; direttore dell'Ufficio centrale per il Corista internazionale; membro del Comitato internazionale di Pesi e Misure; prof. ord. di Fisica sperimentale nella R. Università e direttore del R. Istituto Fisico di Roma. — *R. Istituto Fisico, via di Panisperna, 89 — Roma.*

1888, 9 settembre. **Bordiga** Giovanni [Novara: 2. 4. 1854], dottore in Matematica, socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; libero docente di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Padova; prof. nel R. Istituto Tecnico di Venezia. — *S. Lio — Venezia.*

1889, 14 luglio. **Bortolotti** Ettore [Bologna: 6. 3. 1866], dottore in Matematica; libero docente di Algebra nella R. Università di Roma; prof. straord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Analisi algebrica nella R. Università di Modena.—*R. Università—Modena.*

1898, 10 luglio. **Bourget** Henry [Clermont-Ferrand: 15. 6. 1864], dottore in Scienze matematiche, astronomo aggiunto all'Osservatorio astronomico di Tolosa e «maître de conférences» nella Facoltà di Scienze di Tolosa. — *Rue St.-Jacques, 20 — Toulouse (Haute-Garonne, France).*

1899, 26 febbrajo. **Bourlet** Charles [Strasbourg (Alsace): 25. 4. 1866], dottore in Scienze matematiche, aggregato dell'Università, laureato dello Istituto di Francia, membro della Società Matematica di Francia; prof. di Matematiche speciali nel Liceo St.-Louis, prof. di Matematiche e di Meccanica alla Scuola di Belle Arti. — *Avenue de l'Observatoire, 22 — Paris.*

1887, 4 dicembre. **Brambilla** Alberto [San Zenone al Po (Prov. di Pavia): 13. 6. 1858], dottore in Matematica, libero docente in Geometria projettiva nella R. Università di Napoli; prof. nel R. Liceo Vittorio Emanuele di Napoli. — *R. Liceo Vittorio Emanuele — Napoli.*

DATA DELLA NOMINA.

1888, 5 febbrajo.	**Breglia** Ernesto [Napoli: 4. 1. 1863], ingegnere, dottore in Matematica; libero docente di Statica grafica ed assistente alla cattedra di Statica grafica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. — *Via Trinità degli Spagnoli — Napoli.*
1889, 10 marzo.	**Burali-Forti** Cesare [Arezzo: 13. 8. 1861], dottore in Matematica; prof. nella R. Accademia Militare di Torino. — *R. Accademia Militare — Torino.*
1894, 8 luglio.	**Burgatti** Pietro [Cento (Prov. di Ferrara): 28. 2. 1868], dottore in Matematica, libero docente di Calcolo infinitesimale e assistente alle cattedre di Meccanica razionale e Calcolo infinitesimale nella R. Università di Roma — *Via Principe Amedeo, 175 — Roma.*
1884, 2 marzo.	**Capelli** Alfredo [Milano: 5. 8. 1855], dottore in Matematica, socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli; socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; direttore del *Giornale di Matematiche;* prof. ord. di Algebra complementare ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Napoli. — *R. Università — Napoli.*
1897, 10 gennajo.	**Carslaw** Horatio S. [Helensburgh (Scotland): 12. 2. 1870], M. A. (Cantab.), M. A. (Cambridge), D. Sc. (Glasgow); Fellow of Emanuel College (Cambridge); member of the Mathematical Societies of London and Edinburgh; Senior Assistant to the Professor of Pure Mathematics in the University of Glasgow, Scotland. — *The University — Glasgow (Scotland).*
1898, 14 agosto.	**Cassani** Pietro [Venezia: 4. 6. 1832], dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico Paolo Sarpi di Venezia. — *S. Martino Campo alla Tana, 2160 — Venezia.*
1894, 11 febbrajo.	**Castellano** Filiberto [Pietra Marazzi (Prov. di Alessandria): 6. 3. 1860], dottore in Matematica; prof. nella R. Accademia Militare di Torino. — *R. Accademia Militare — Torino.*
1897, 10 gennajo.	**Castelli** Enrico [Livorno: 5. 12. 1869], dottore in Fisica; prof. nel R. Istituto Tecnico di Aquila. — *R. Istituto Tecnico — Aquila.*
1889, 13 gennajo.	**Castelnuovo** Guido [Venezia: 14. 8. 1865], dottore in Matematica, socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Torino; prof. ord. di Geometria analitica e projettiva nella R. Università di Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*
1886, 5 dicembre.	**Cerruti** Valentino [Croce Mosso [Prov. di Novara): 14 2. 1850], uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, membro dell'Accademia Imperiale Alemanna Leopoldino-Carolina de' Curiosi della

DATA DELLA NOMINA.

Natura, della Società Matematica di Francia e della Società di Scienze Matematiche e Naturali di Cherbourg; membro del Consiglio Superiore di P. I.; presidente della Società degli Ingegneri e degli Architetti Italiani; preside della Facoltà Matematica e prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Matematiche superiori nella R. Università di Roma.— *Via delle Sette Sale, 16 — Roma.*

1888, 11 marzo. **Chizzoni** Francesco [San Martino dell'Argine (Prov. di Mantova): 10. 8. 1848], ingegnere; socio effettivo dell'Accademia Gioenia di Catania, socio corrispondente dell'Accademia Virgiliana di Mantova; prof. ord. di Geometria analitica e projettiva nella R. Università di Modena. — *R. Università—Modena.*

1898, 10 luglio. **Ciani** Edgardo [Rocca S. Casciano (Prov. di Firenze): 7. 10. 1864], dottore in Matematica, libero docente di Geometria projettiva ed analitica nelle RR. Università di Pisa e di Messina; prof. di Matematica nel R. Istituto Tecnico di Milano.— *Via Lattuada, 12 — Milano.*

1898, 27 febbrajo. **Conti** Alberto [Firenze: 3. 12. 1873], già allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, dottore in Matematica; direttore del periodico *Il Bollettino di Matematiche e di Scienze Fisiche e Naturali;* prof. nella Scuola Normale Femminile Anna Morandi Manzolini di Bologna. — *Via S. Stefano, 170, p° 2°—Bologna.*

1895, 28 aprile. **Cordone** Gerolamo [Genova: 3. 11. 1867], dottore in Matematica, assistente alla cattedra di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Genova. — *Via Cannato il Curto, 11, int. 5 — Genova.*

1896, 5 gennajo. **Cosserat** Eugène [Amiens (Somme, France): 4. 3. 1866], già allievo della Scuola Normale Superiore di Parigi, aggregato dell'Università, dottore in Scienze Matematiche, associato ordinario dell'Accademia delle Scienze, Inscrizioni e Lettere di Tolosa; membro della Società Matematica di Francia; prof. di Calcolo differenziale ed integrale nell'Università di Tolosa. — *Rue de Metz, 1 — Toulouse (Haute-Garonne, France).*

1898, 23 gennajo. **Cosserat** François [Douai (Nord, France): 26 10. 1852], già allievo della Scuola Politecnica di Parigi, ingegnere capo di Ponti e Strade; membro della Società Matematica di Francia. — *Boulevard St.-Germain, 112 — Paris.*

1887, 4 dicembre. **Costa** Gregorio [Napoli: 29. 5. 1856], ingegnere, dottore in Fisica; prof. di Fisica applicata nel R. Istituto Tecnico e prof di Fisica sperimentale nel Collegio Militare di Napoli. — *Via Tribunali, 194 — Napoli.*

1887, 20 novembre. **Cremona** Luigi [Pavia: 7. 12. 1830], senatore del Regno, ex Ministro della P. I.; *LL. D. Edinb., Foreign F. R. S., Hon.*

DATA DELLA NOMINA.

F. C. P. S; presidente della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, socio nazionale non residente della R. Accademia delle Scienze di Torino, membro effettivo del R. Istituto Lombardo; corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), della Reale Accademia delle Scienze di Berlino e della Imperiale Reale Accademia delle Scienze di Vienna; socio delle Reali Accademie delle Scienze di Amsterdam, Bologna, Monaco, Napoli, Palermo, e delle Società Reali delle Scienze di Copenhagen, Gottinga, Liegi, Praga, delle Società Matematiche di Francia e di Praga; corrispondente della Società Filomatica di Parigi; membro onorario della Società Matematica di Londra, della Società Filosofica di Cambridge, dell'Associazione Britannica pel progresso delle Scienze; prof. onorario della R. Università di Bologna; prof. ord. di Geometria superiore nella R. Università di Roma; direttore della R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1898, 13 novembre. **Daniele** Ermenegildo [Chivasso (Prov. di Torino): 13. 10. 1875], dottore in Matematica, assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Torino. — *Via Governolo, 6 — Torino.*

1899, 15 gennajo. **Del Giudice** Modestino [Mercagliano (Principato Ultra): 13. 2. 1864], dottore in Matematica, libero docente di Geometria analitica ed assistente alle cattedre di Geometria analitica e Geometria projettiva nella R. Università di Napoli. — *Via Rimini, 57 — Napoli.*

1888, 5 febbrajo. **Della Rocca di Candal** Gino [Napoli: 1. 3. 1848], ingegnere, Regio Ispettore Capo delle Strade Ferrate, aggregato al Comitato Superiore delle Ferrovie, segretario generale della R. Commissione per l'ordinamento delle Strade Ferrate. — *Corso Vittorio Emanuele, 154 — Roma.*

1886, 5 dicembre. **Del Pezzo** Pasquale, duca di Cajanello [Berlino: 2. 5. 1859], dottore in Diritto e in Matematica, socio dell'Accademia Pontaniana e della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, socio corrispondente del R. Istituto d'Incoraggiamento in Napoli; membro della Società Matematica di Francia; prof. ord. di Geometria superiore nella R. Università di Napoli. — *Piazza S. Marcellino, 2 — Napoli.*

1887, 13 febbrajo. **Del Re** Alfonso [Calitri (Prov. di Avellino): 9. 10. 1859], dottore in Matematica, socio attuale della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti, e della Società dei Naturalisti di Modena; socio ordinario della Società napoletana per la diffusione della cultura; prof. ord. di Geometria descrittiva con disegno nella R. Università di Napoli. — *R. Università — Napoli.*

DATA DELLA NOMINA.

1895, 10 marzo. **Di Pirro** Giovanni, dottore in Matematica.—*Via Buonarroti, 39, int. 34 — Roma.*

1887, 4 dicembre. **D'Ovidio** Enrico [Campobasso: 11. 8. 1843], uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, socio residente della R. Accademia delle Scienze di Torino; corrispondente del R. Istituto Lombardo, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, socio dell'Accademia Pontaniana; socio onorario dell'Accademia di Scienze ed Arti di Modena; membro delle Società Matematiche di Francia e di Praga, preside della Facoltà Matematica e prof. ord. di Algebra complementare e Geometria analitica, ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Torino.—*Corso Oporto, 30— Torino.*

1896, 26 gennajo. **Durán Loriga** Juan J. [La Coruña (España): 17. 6. 1854], membro della Società Matematica di Francia e dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze; Director de la Academia Preparatoria para Carreras Civiles y Militares; Comandante de Artilleria. — *Plaza de Maria Pita, 20 — La Coruña (Spagna).*

1894, 22 luglio. **Enriques** Federico [Livorno: 5. 1. 1871], dottore in Matematica, prof. straord. di Geometria projettiva e descrittiva con disegno nella R. Università di Bologna. — *Via S. Giuliano, 2 (Strada Stefano) — Bologna.*

1893, 8 gennajo. **Fano** Gino [Mantova: 5. 1. 1871], dottore in Matematica, socio effettivo della R. Accademia Virgiliana di Scienze, Lettere ed Arti di Mantova; libero docente di Geometria analitica e projettiva nella R. Università di Roma; prof. straord. di Algebra complementare e Geometria analitica nella R. Università di Messina. — *R. Università — Messina.*

1891, 18 gennajo. **Fiorentino** Gioacchino [Lercara Friddi (Prov. di Palermo): 9. 10. 1864], dottore in Matematica, prof. nel R. Ginnasio di Caltanissetta. — *R. Ginnasio — Caltanissetta.*

1899, 14 maggio. **Fisher** George E., A. M., dottore in Filosofia, assistente alle cattedre di Matematiche nell'Università di Pennsylvania.—*University of Pennsylvania, College Hall, Station B — Philadelphia, Pa. (U. S. A.).*

1890, 5 gennajo. **Floridia** Giorgio [Modica (Prov. di Siracusa): 23. 7. 1867], dottore in Matematica, prof. nel R. Ginnasio di Modica. — *R. Ginnasio — Modica.*

1887, 4 dicembre. **Fouret** Georges [Paris: 29. 1. 1845], già allievo della Scuola Politecnica di Parigi, ex-capitano del Genio; membro onorario della Società Filomatica di Parigi; già presidente della Società d'Incoraggiamento per l'Industria nazionale; membro del Co-

DATA DELLA NOMINA.

mitato Consultivo delle assicurazioni contro gli accidenti del lavoro; membro della Società degl'Ingegneri civili di Francia e dello « Institut des Actuaires français »; membro dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze; membro della Commissione permanente internazione pel « Repertorio Bibliografico delle Scienze Matematiche »; esaminatore di ammissione e ripetitore di Meccanica nella Scuola Politecnica di Parigi. — *Rue Washington, 16 — Paris.*

1891, 24 maggio. **Galdeano,** Don Zoel Garcia de [Pamplona (Spagna): 5. 7. 1846], dottore in Scienze matematiche, licenziato in Filosofia e Lettere ed in Scienze fisiche, membro corrispondente della R. Accademia delle Scienze matematiche, fisiche e naturali di Spagna e della R. Accademia delle Scienze di Lisbona; prof. di Calcolo differenziale ed integrale nell'Università di Saragozza. — *Calle del Coso, n° 99, piso 3° — Zaragoza (Spagna).*

1893, 8 gennajo. **Garibaldi** Cesare [Genova: 27. 5. 1865], ingegnere, dottore in Matematiche, assistente alla cattedra di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Genova. — *Via Balbi, 38 — Genova.*

1886, 24 gennajo. **Giudice** Francesco [Codevilla (Prov. di Pavia): 1. 3. 1855], ingegnere, dottore in Matematica, libero docente di Algebra complementare nella R. Università di Genova; prof. nel R. Istituto Tecnico di Genova. — *R. Istituto Tecnico — Genova.*

1888, 8 gennajo. **Grimaldi** Giovan Pietro [Modica (Prov. di Siracusa): 28. 10. 1860], dottore in Fisica, socio effettivo e segretario dell'Accademia Gioenia di Catania; prof. ord. di Fisica sperimentale ed inc. di un corso di Fisica per i medici ed i farmacisti nella R. Università di Catania. — *Via Androne, 29 — Catania.*

1899, 12 marzo. **Gyldén** Hans Olof Frederik [Jena (Germania): 7. 11. 1867], capitano della R. Marina Svedese, prof. di Astronomia e di Navigazione nella R. Scuola navale. — *Engelbrektsgatan, 10 — Stockholm (Svezia).*

1894, 13 maggio. **Halsted** George Bruce [Newark (New Jersey, U. S. A): 25. 11. 1853] [**S. P.**], A. M. (Princeton); Ph. D. (Johns Hopkins); Ex-Fellow of Princeton College; twice Fellow of Johns Hopkins University; Intercollegiate Prizeman; sometime Instructor in Post Graduate Mathematics, Princeton College; Professor of Mathematics, University of Texas, Austin, Texas; member of the American Mathematical Society; member of the London Mathematical Society; member of the Association for the Improvement of Geometrical Teaching; member of the Mathematical Association; member of the Society for the Promotion of the Engineering Education; membre honoraire du Comité Lobatchefsky; Fellow of the American Association for

DATA DELLA NOMINA.

the Advancement of Science; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Miembro de la Sociedad Cientifica « Alzate » de México; Socio Corresponsal de la Sociedad de Geografia y Estadística de México; membre perpétuel de la Société Mathématique de France; President of the Texas Academy of Science. — *Guadalupe Street, 2407 — Austin (Texas, U. S. A.).*

1899, 26 febbrajo. **Hardcastle** Frances [Writtle (Inghilterra): 13. 8. 1866], Mathem. Tripos, Cambridge; member of the London Mathematical Society, member of the American Mathematical Society.— *Huntingdon Road, 14 — Cambridge (England).*

1887, 4 dicembre. **Humbert** Georges [Paris: 7. 1. 1859] [**S. P.**], già allievo della Scuola Politecnica di Parigi, ingegnere delle Mine, dottore in Scienze matematiche, membro titolare della Società Filomatica di Parigi, membro della Società Matematica di Francia; membro della Commissione permanente internazionale pel « Repertorio Bibliografico delle Scienze Matematiche »; professore di Analisi alla Scuola Politecnica di Parigi. — *Rue Daubigny, 10 — Paris.*

1888, 9 settembre. **Jadanza** Nicodemo [Campolattaro (Prov. di Benevento): 14. 10. 1847], dottore in Matematica, socio residente della R. Accademia delle Scienze di Torino, socio corrispondente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; prof. ord. di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino; prof. straord. di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino. — *R. Università — Torino.*

1889, 9 giugno. **Jordan** Camillo [Lyon: 5. 1. 1838] [**S. P.**], membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, sezione di Geometria), socio straniero della R. Accademia dei Lincei, corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, membro della Società Filomatica di Parigi, della Società Matematica di Francia, dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze; membro onorario della Società scientifica di Atene; ingegnere capo delle Mine; direttore del *Journal de Mathématiques pures et appliquées;* prof. di Matematiche al Collegio di Francia; prof. di Analisi alla Scuola Politecnica di Parigi. — *Rue de Varenne, 48 — Paris.*

1887, 5 giugno. **Jung** Giuseppe [Milano: 16. 3. 1845], dottore in Matematica, membro effettivo del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, membro della Società Matematica di Francia, membro onorario dell'Associazione Britannica pel progresso delle Scienze; prof. ord. di Statica grafica e Geometria projettiva nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. — *Via Borgonuovo, 9 — Milano.*

DATA DELLA NOMINA.

1892, 24 gennajo. **Kerbedz,** M.me Eugénie de. — *Kouznietschnoï, 14 — St.-Pétersbourg (Russie).*

1889, 10 novembre. **Krause** Martin Johann [Wildknit (Ostpreussen): 29. 6. 1851], dottore in Filosofia, membro della Società Reale delle Scienze di Lipsia; prof. ord. nel Politecnico di Dresda.—*Königl. Sächs. Technischen Hochschule — Dresden (Germania).*

1891, 24 maggio. **Laisant** Charles Ange [Basse-Indre, Loire Inférieure (France): 1. 11. 1841], già allievo della Scuola Politecnica di Parigi, dottore in Scienze matematiche, membro della Società Filomatica di Parigi e della Società Matematica di Francia, membro corrispondente delle RR. Accademie di Scienze di Lisbona e di Madrid, dell'Istituto di Coimbra, della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, dell'Istituto Nazionale di Ginevra; già presidente delle due prime sezioni dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze e della Società Matematica di Francia; segretario della Commissione permanente internazionale pel « Repertorio Bibliografico delle Scienze Matematiche »; direttore delle *Nouvelles Annales de Mathématiques* e dell'*Intermédiaire des Mathématiciens;* esaminatore d'ammissione e ripetitore di Meccanica alla Scuola Politecnica di Parigi. — *Avenue Victor Hugo, 162 — Paris.*

1893, 26 febbrajo. **Lauricella** Giuseppe [Girgenti: 15. 12. 1867], dottore in Matematica, libero docente di Fisica matematica nella R. Università di Pisa; socio effettivo dell'Accademia Gioenia di Catania; prof. straord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Catania. — *Via Grotte Bianche, 7, p° 2. — Catania.*

1900, 25 febbrajo. **Lebon** Désiré Ernest [Audigny, Aisne (France): 25. 8. 1846], aggregato di Matematiche; membro dell'Alleanza Francese per la propagazione della Lingua Francese nelle Colonie ed all'Estero, della Società degli Amici dell'Università di Parigi, della Società astronomica di Francia, della R. Società astronomica di Londra; già prof. supplente di Geometria descrittiva al Conservatorio di Arti e Mestieri di Parigi; prof. di Matematiche nel Liceo Carlomagno di Parigi; correttore per l'ammissione alla Scuola Militare ed esaminatore per il Baccalaureato Moderno alla Sorbona. — *Rue des Écoles, 4bis — Paris.*

1898, 8 maggio. **Levi** Beppo [Torino: 14. 5. 1875], dottore in Matematica. — *Via Pastrengo, 12 — Torino.*

1895, 24 febbrajo. **Levi-Civita** Tullio [Padova: 29. 3. 1873], dottore in Matetica, prof. straord. di Meccanica razionale ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Padova. — *Via S. Gaetano — Padova.*

DATA DELLA NOMINA.

1896, 27 dicembre. **Lo Monaco Aprile** Luigi [Palermo: 4. 4. 1875], dottore in Matematica, prof. nel R. Ginnasio di Avellino.—*R. Ginnasio— Avellino.*

1887, 4 dicembre. **Loria** Gino [Mantova: 19. 5. 1862], dottore in Matematica, socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Accademia Pontaniana di Napoli e della R. Società Boema delle Scienze; membro dell'« Association for the Improvement of Geometrical Teaching »; corrispondente della R. Accademia Virgiliana di Scienze, Lettere ed Arti di Mantova e della Società scientifica « Antonio Alzate » del Messico; membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; direttore del *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche;* prof. ord. di Geometria superiore ed inc. di Geometria descrittiva nella R. Università di Genova.—*Passo Caffaro, 1— Genova.*

1899, 15 gennajo. **Lovett** Edgard O., M. A., Ph. D. (Virginia, Leipzig); Member of the London Mathematical Society, Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Assistant Professor of Mathematics in the University of Princeton. — *University of Princeton — Princeton (New Jersey, U. S. A.).*

1894, 23 dicembre. **Macfarlane** Alexander [Blairgowrie (Scotland): 21. 4. 1851], dottore in Scienze Matematiche e Fisiche, dottore onorario dell'Università del Michigan, socio della Società Reale di Edimburgo, membro del Consiglio direttivo dell'Istituto degli Ingegneri elettricisti in America, corrispondente della Società scientifica « Antonio Alzate » del Messico; segretario generale della « International Society for the promotion of Quaternions and allied Mathematics »; prof. di Fisica matematica nella « Lehigh University » di South Bethlehem. — *Gowrie Grove — Chatham (Ontario, Canada).*

1890, 23 marzo. **Macrì** Vincenzo, ingegnere. — *Casteltermini (Prov. di Girgenti).*

1894, 14 gennajo. **Mancini** Ernesto, ingegnere. — *Via Lungara, 10 — Roma.*

1888, 13 maggio. **Marcolongo** Roberto [Roma: 23. 8. 1862], dottore in Matematica, libero docente di Meccanica razionale nella R. Università di Roma; prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Fisica matematica nella R. Università di Messina. — *R. Università — Messina.*

1897, 14 novembre. **Martin** Artemas [Steuben Co. (New York, U. S. A.): 3. 8. 1835], M. A., Ph. D., LL. D.; Member of the London Mathematical Society; Membre de la Société Mathématique de France; Member of the Edinburgh Mathematical Society; Member of the Mathematical Association, England; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Member of the American

DATA DELLA NOMINA.

Mathematical Society; Member of the Philosophical Society of Washington; Fellow of the American Association for the Advancement of Science; Editor and publisher of the *Mathematical Visitor;* Editor and publisher of the *Mathematical Magazine.* — *U. S. Coast and Geodetic Survey Office* — *Washington (District of Columbia, U. S. A.).*

1886, 24 gennajo. **Martinetti** Vittorio [Mantova: 11. 8. 1859], dottore in Matematica, socio ordinario della R. Accademia Peloritana di Scienze, Lettere e Belle Arti di Messina, corrispondente della R. Accademia Virgiliana di Scienze, Lettere e Belle Arti di Mantova e dell'Accademia Gioenia di Catania; preside della Facoltà Matematica e prof. ord. di Geometria projettiva e descrittiva con disegno ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Messina. — *R. Università* — *Messina.*

1899, 9 luglio. **Martone** Michele [Napoli: 18. 8. 1851], prof. di Matematica nel R. Istituto Tecnico di Messina. — *Fermo in posta* — *Messina.*

1887, 13 febbrajo. **Masoni** Udalrigo [Napoli: 11. 7. 1860], dottore in Matematica, ingegnere; socio ordinario residente dell'Accademia Pontaniana; socio ordinario residente del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli; socio nazionale corrispondente della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; libero docente di Meccanica razionale nella R. Università; prof. ord. di Idraulica teoretica e pratica e direttore del relativo Gabinetto nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. — *S. Potito, 45* — *Napoli.*

1895, 24 novembre. **Massarini** Sig.na Iginia, dottoressa in Matematica, tit. di Matematica nella Scuola Tecnica Femminile Marianna Dionigi ed inc. di Matematica nel Ginnasio E. Q. Visconti (Sezioni femnili) di Roma. — *Via Nazionale, 158* — *Roma.*

1898, 27 marzo. **Medolaghi** Paolo [Firenze: 24. 11. 1873], dottore in Matematica. — *Via Manin, 69* — *Roma.*

1888, 10 giugno. **Merlani** Adolfo [Bologna: 31. 7. 1856], dottore in Matematica, assistente alla cattedra di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Bologna. — *Via Indipendenza, 19* — *Bologna.*

1888, 13 maggio. **Mittag-Leffler** Gösta [Stoccolma (Svezia): 16. 3. 1846], dottore in Filosofia nell'Università di Upsala, dottore (honoris causa) in Matematica nell'Università di Bologna, dottore onorario «of Civil Law» nell'Università di Oxford, dottore onorario in Scienze nell'Università di Cambridge; membro dell'Accademia Reale delle Scienze di Svezia, della Società Reale delle Scienze di Upsala, della Società Reale delle Scienze di Norvegia, della Società Reale delle Scienze di Copenaghen, della Società delle Scienze di Finlandia, della Videnskabs-Selskabet i Christiania,

DATA DELLA NOMINA.

dell'Accademia Imperiale Alemanna Leopoldino-Carolina de' Curiosi della Natura, della Società Matematica di Francia, della Società Astronomica di Lipsia; membro onorario della Società Filosofica di Cambridge, della Società Filosofica e Letteraria di Manchester, delle Società Matematiche di Londra, di Mosca, di Pietroburgo e della Nederlandsch Wiskundig Genootschap di Amsterdam; socio corrispondente della Società Reale delle Scienze di Gottinga e della Società Reale delle Scienze di Liegi, dell'Associazione Britannica pel progresso delle Scienze, dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietroburgo, della R. Accademia delle Scienze di Torino, dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze); socio straniero della Kong. Danske Videnskaberns Selskab, della Società Reale di Londra, della R. Accademia dei Lincei; redattore capo degli *Acta Mathematica;* prof. ord. di Analisi superiore nella Università di Stoccolma. — *Djursholm près Stockholm* (*Svezia*).

1888, 13 maggio. **Montesano** Domenico [Potenza (Prov. di Basilicata): 22. 15. 1863], dottore in Matematica; socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; prof. ord. di Geometria projettiva nella R. Università di Napoli. — *Via Duomo, 36 — Napoli.*

1889, 27 gennajo. **Moore** Eliakim Hastings [Marietta (Ohio, U. S. A.): 26. 1. 1862], dottore in Filosofia, dottore onorario in Filosofia nell'Università di Gottinga; membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung, della Società Matematica di Londra e della Società Matematica Americana; prof. di Matematiche nell'Università di Chicago. — *The University of Chicago* (*Illinois, U. S. A.*).

1899, 12 febbrajo. **Morale** Michele [Bagni Cannicattini (Prov. di Siracusa): 21. 7. 1874], dottore in Matematica. — *Bagni Cannicattini* (*Prov. di Siracusa*).

1887, 4 dicembre. **Morera** Giacinto [Novara: 18. 7. 1856], dottore in Matematica; socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei; rettore, prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Fisica matematica nella R. Università di Genova.—*R. Università—Genova.*

1888, 8 gennajo. **Murer** Vittorio [Como: 12. 7. 1860], dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Alessandria. — *R. Liceo — Alessandria.*

1895, 10 marzo. **Neppi Modona** Angelo [Cento (Prov. di Ferrara): 15. 10. 1862], ingegnere civile, dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico di Ancona. — *R. Istituto Tecnico — Ancona.*

1891, 25 gennajo. **Paci** Paolo [Ameglia (Prov di Genova): 13. 5. 1847], dottore in Matematica, dottore aggregato della R. Università di Genova; prof. nella R. Scuola Superiore di Applicazione per gli Studi Commerciali e nel R. Liceo Colombo di Genova. — *R. Liceo Colombo — Genova.*

DATA DELLA NOMINA.

1895, 28 aprile. **Painlevé** Paul [Paris: 5. 12. 1863], già allievo della Scuola Normale Superiore di Parigi, dottore in Scienze; prof. aggiunto nella Facoltà delle Scienze di Parigi.—*Rue de Rennes, 99—Paris.*

1899, 24 dicembre. **Pascal** Ernesto [Napoli: 7 2. 1865], dottore in Matematica, socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, socio corrispondente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; membro della R. Accademia delle Scienze di Praga; libero docente nelle RR. Università di Pisa e di Napoli; prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Pavia. — *R. Università — Pavia.*

1888, 8 aprile. **Paternò di Sessa** Emanuele [Palermo: 12. 12. 1847], senatore del Regno, già sindaco di Palermo; membro del Consiglio superiore di Pubblica Istruzione; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R Accademia dei Lincei, socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Napoli, di Torino, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia Gioenia di Catania, dell'Accademia Peloritana di Messina, della Società Scientifica Argentina; membro onorario della Società di Scienze fisiche di Bukharest; membro della Società Chimica di Berlino e della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; dottore onorario dell'Università di Erlangen; prof. onorario della R. Università di Palermo; direttore della *Gazzetta Chimica Italiana;* prof. ord. di Applicazioni della Chimica ed inc. di Chimica analitica nella R. Università di Roma. — *Via Nazionale, 13 — Roma.*

1887, 4 dicembre. **Peano** Giuseppe [Cuneo: 27. 8. 1858], dottore in Matematica, socio residente della R. Accademia delle Scienze di Torino; membro della Società scientifica « Antonio Alzate » del Messico; direttore della *Rivista di Matematica;* prof. ord. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino; prof. di Calcolo infinitesimale nella R. Accademia Militare di Torino. — *R. Università — Torino.*

1890, 14 dicembre. **Pennacchietti** Giovanni [Arcevia (Prov. di Ancona): 25. 7. 1854], dottore in Scienze Fisico-Matematiche, membro effettivo dell'Accademia Gioenia di Catania, membro della Società Italiana di Fisica; prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Fisica matematica nella R. Università di Catania.—*R. Università — Catania.*

1898, 12 giugno. **Perna** Alfredo [Napoli: 21 9. 1873], dottore in Matematica, prof. nella R. Scuola Normale di Lecce.—*Discesa Sanità, 12—Napoli.*

DATA DELLA NOMINA.

1897, 10 gennajo. **Petrovich** Michele [Belgrado (Serbia): 6. 5. 1868], già allievo della Scuola Normale Superiore di Parigi, licenziato in Scienze Fisiche, dottore in Scienze matematiche; membro corrispondente dell'Accademia Reale di Belgrado, dell'Accademia delle Scienze di Agram e della Società Matematica di Francia; prof. di Matematiche nella Facoltà delle Scienze di Belgrado. — *Kossantch-Venac, 26 — Belgrado (Serbia).*

1890, 13 aprile. **Picard** Émile [Paris: 24. 7. 1856], dottore in Scienze matematiche; membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, sezione di Geometria); corrispondente delle Accademie delle Scienze di Atene, Berlino, Bologna, Copenaghen, Pietroburgo, e Torino, e della Società Reale delle Scienze di Gottinga, della Società Reale delle Scienze di Upsala; membro onorario della Società Matematica di Londra; membro e già presidente della Società Matematica di Francia; prof. di Analisi superiore nell'Università di Parigi; prof. di Meccanica generale nella Scuola Centrale delle Arti e Manifatture di Parigi.—*Rue Souffilot, 13— Paris.*

1889, 10 marzo. **Pieri** Mario [Lucca: 22. 6. 1860], dottore in Matematica, socio corrispondente della R. Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti; libero docente di Geometria projettiva nella R. Università di Torino, prof. straord. di Geometria projettiva e descrittiva ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Catania — *R. Università — Catania.*

1888, 11 marzo. **Pincherle** Salvatore [Trieste: 11. 3. 1853], dottore in Matematica, accademico benedettino della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; corrispondente della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; prof. ord. di Algebra e Geometria analitica ed inc. di Matematiche superiori nella R. Università di Bologna. — *R. Università — Bologna.*

1889, 24 febbrajo. **Pittarelli** Giulio [Campochiaro (Prov. di Molise): 2. 2. 1852], ingegnere, dottore in Matematica, socio corrispondente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; prof. ord. di Geometria descrittiva con disegno nella R. Università di Roma e di Applicazioni di Geometria descrittiva nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Roma; inc. delle conferenze alla Scuola di Magistero per la Matematica.—*Piazza S. Pietro in Vincoli, 5— Roma.*

1887, 4 dicembre. **Piuma** marchese Carlo Maria [Genova: 26. 9. 1837], prof. ord. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Genova. — *Via S. Sebastiano, 6 — Genova.*

1890, 23 marzo. **Poincaré** Henri [Nancy (France): 29. 4. 1854], membro del-

DATA DELLA NOMINA.

l'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, sezione di Geometria), socio straniero della R. Accademia dei Lincei, membro e già presidente della Società Matematica di Francia, membro dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze, etc.; presidente della Commissione permanente internazionale pel « Repertorio bibliografico delle Scienze Matematiche »; già allievo della Scuola Politecnica; dottore in Scienze matematiche; ingegnere delle Mine; membro del « Bureau des Longitudes »; professore di Meccanica celeste nell'Università di Parigi.—*Rue Claude-Bernard, 63 — Paris.*

1894, 13 maggio. **Porcelli** Onofrio, preside del R. Istituto Tecnico di Bari. — *R. Istituto Tecnico — Bari.*

1888, 14 ottobre. **Previtera** Carmelo [Linguaglossa (Prov. di Catania): 28. 3. 1868], ingegnere, dottore in Matematica, membro della Società Meteorologica Italiana. — *Linguaglossa (Prov. di Catania).*

1898, 26 giugno. **Puglisi** Mattia [Messina: 6. 4. 1871], dottore in Matematica, prof. di Matematica nel R. Ginnasio di Cefalù.—*R. Ginnasio — Cefalù.*

1890, 12 gennajo. **Reina** Vincenzo [Como: 22. 11. 1862], dottore in Matematica, prof. straord. di Geodesia e Geometria pratica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1887, 27 febbrajo. **Retali** Virginio [Marciana Marina (Prov. di Livorno): 24. 11. 1853], dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo C. Beccaria di Milano. — *R. Liceo C. Beccaria — Milano.*

1894, 23 dicembre. **Ricci** Gregorio [Lugo (Prov di Ravenna): 12 1. 1853], dottore in Scienze Fisico-Matematiche, membro effettivo del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; prof. ord. di Algebra complementare ed inc. di Fisica Matematica nella R. Università di Padova.—*Piazza Vittorio Emanuele II, 2639 — Padova.*

1887, 13 febbrajo. **Rindi** Scipione [Lucca: 29. 10. 1859], dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo Machiavelli in Lucca. — *Via Elisa, 14 — Lucca.*

1898, 13 febbrajo. **Ronco** Nino Emilio [Genova: 27. 11. 1865], ingegnere, dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Geometria projettiva nella R. Università di Genova; prof. di Idraulica e Macchine idrauliche nella Scuola Superiore Navale di Genova. — *Via Roma, 10 — Genova.*

1898, 24 aprile. **Rudio** Ferdinando [Wiesbaden (Germania): 2. 8. 1856], dottore in Filosofia, prof ord nella Scuola Politecnica di Zurigo.—*Feldeggstrasse, 64 — Zürich (Svizzera).*

1888, 11 marzo. **Ruffini** Ferdinando Paolo [Reggio Emilia: 1. 4. 1823], inge-

DATA DELLA NOMINA.

gnere, dottore in Scienze; socio benedettino della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; socio permanente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena; socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; prof. emerito della R. Università di Bologna. — *R. Università — Bologna.*

1888, 26 agosto. **Russo** Giovanni [Catanzaro: 1. 9. 1851], prof. di Matematica nell'Istituto Tecnico pareggiato e nella Scuola Tecnica pareggiata di Catanzaro. — *Via Scalfaro, palazzo Pugliese, 1° p°— Catanzaro.*

1889, 28 aprile. **Sadun** Elda [Pitigliano (Prov. di Grosseto): 29. 1. 1858], dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico. — *R. Istituto Tecnico — Roma.*

1887, 4 dicembre. **Salvatore-Dino** Nicola, socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli, corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli; prof. ord. di Geometria analitica nella R. Università di Napoli. — *Via Duomo, 77 — Napoli.*

1888, 13 maggio. **Schlegel** Victor [Frankfurt a/O: 4. 3. 1843], dottore in Filosofia, membro dell'Accademia Imperiale Alemanna Leopoldino-Carolina de' Curiosi della Natura, della Società Matematica di Francia e della Società Matematica Americana; prof. nella Reale « höhere Maschinenbau-Schule ». — *Königliche höhere Maschinenbau-Schule — Hagen i/W (Germania).*

1899, 14 maggio. **Schwatt** Isaac J. [18. 6. 1867], dottore in Filosofia, membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung, assistente alle cattedre di Matematiche nella Università di Pennsylvania. — *University of Pennsylvania, College Hall, Station B — Philadelphia, Pa. (U. S. A.).*

1898, 9 gennajo. **Scott** Charlotte Angas [Lincoln (England): 8. 6. 1858], D. Sc. (London); Member of the London Mathematical Society; Member of the American Mathematical Society; Honorary Member of the Amsterdam Mathematical Society; Professor of Mathematics in Bryn Mawr College. — *Bryn Mawr College — Bryn Mawr (Pennsylvania, U. S. A.).*

1887, 27 luglio. **Segre** Corrado [Saluzzo (Prov. di Cuneo): 20. 8. 1863], dottore in Matematica; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze; socio residente della R. Accademia delle Scienze di Torino; corrispondente della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; prof. ord. di Geometria superiore nella R. Università di Torino. — *Corso Vittorio Emanuele, 85 — Torino.*

1898, 30 gennajo. **Severini** Carlo [Arcevia (Prov. di Ancona): 9. 4. 1872], dot-

DATA DELLA NOMINA.

tore in Matematica; prof. nel R. Istituto Tecnico di Spezia. — *Via Roma, 7, int. 3 — Spezia.*

1894, 28 gennajo. **Somigliana** Carlo [Como: 20. 9. 1860], dottore in Matematica, socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei; socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; prof. ord. di Fisica Matematica nella R. Università di Pavia.— *R. Università. — Pavia.*

1894, 11 marzo. **Studnikčka** Franz Josef [Janov bei Soběslav in Böhmen: 27. 6. 1836], dottore in Filosofia, membro ordinario della Reale Società Boema delle Scienze e della Imperiale Accademia Francesco Giuseppe delle Scienze in Praga; corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Agram e della Società Reale delle Scienze di Liegi; membro onorario del Club di Scienze Naturali e della Società Geografica di Praga; protettore della Società Matematica Boema; prof. ord. nella I. R. Università Boema di Praga. — *Böhmische Universität — Prag (Boemia).*

1886, 4 aprile. **Taschetti** Giuseppe [Licata (Prov. di Girgenti): 9. 1. 1852], prof. nel R. Ginnasio G. B. Vico. — *S. Mandato, 50 — Napoli*

1895, 13 gennajo. **Terzi** Marchese Gabriele [Bergamo : 17. 2. 1857], Tenente Colonnello di Stato Maggiore, Capo di Stato Maggiore della Divisione Militare di Brescia. — *Palazzo Terzi — Bergamo.*

1887, 4 dicembre. **Tonelli** Alberto [Lucca: 25. 12. 1849], dottore in Matematica, corrispondente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Algebra complementare nella R. Università di Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1897, 14 febbrajo. **Traverso** Nicolò [Savona (Provincia di Genova): 5. 7. 1872], dottore in Matematica; prof. nel R Liceo di Alba. — *R. Liceo — Alba (Prov. di Cuneo).*

1899, 15 gennajo. **Vacca** Giovanni [Genova: 18. 11. 1872], dottore in Matematica, assistente alla cattedra di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino.—*Corso Vittorio Emanuele, 29—Torino.*

1894, 11 marzo. **Vailati** Giovanni, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Siracusa. — *R. Liceo — Siracusa.*

1893, 9 luglio. **Valeri** Demetrio [Codogno (Prov. di Milano): 22. 12. 1848], ingegnere, libero docente di Geometria projettiva nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano; R. Provveditore agli Studi in Chieti. — *Chieti.*

1899, 22 gennajo. **Vassilief** Alessandro [Kasan: 5. 7. 1853], dottore in Matematica, socio delle Società Matematiche di Kharkow, Kiew e di Mosca; socio perpetuo della Società degli Amici delle Scienze Naturali, di Antropologia e di Etnografia in Mosca; membro onorario della Società di Scienze Fisiche e Naturali di Bor-

DATA DELLA NOMINA.

deaux, dell'Istituto 19 Settembre in Lisbona e della Società scientifica di Nijnii-Novgorod; membro della Società Matematica di Francia e della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; presidente della Società Fisico-Matematica di Kasan; prof. ord. di Matetiche nell'Università Imperiale di Kasan. — *Kasan (Russia)*.

1896, 27 dicembre. **Verde** Felice [Genova: 30 9. 1852], ingegnere, capitano di Corvetta, direttore dell'Ufficio Idrografico della R. Marina del 1° Dipartimento. — *Ufficio Idrografico della R. Marina del 1° Dipartimento — Spezia.*

1888, 11 marzo. **Veronese** Giuseppe [Chioggia (Prov di Venezia): 7. 5. 1854], dottore in Matematica; deputato al Parlamento; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze; membro effettivo del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; socio ord. della R. Accademia di Padova e dello Ateneo Veneto; socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; prof. ord. di Geometria analitica ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Padova. — *R. Università — Padova.*

1896, 27 dicembre. **Viterbi** Adolfo [Mantova: 27. 9. 1873], dottore in Matematica.— *Piazza S. Teresa, 1 — Mantova.*

1887, 18 dicembre. **Vivanti** Giulio [Mantova: 24. 5. 1859], ingegnere, dottore in Matematica; socio della R. Accademia Virgiliana di Mantova e della R. Accademia Peloritana di Messina; prof. straord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Messina. — *R. Università — Messina.*

1887, 4 dicembre. **Volterra** Vito [Ancona: 3. 5. 1860], dottore in Fisica; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio residente della R. Accademia delle Scienze di Torino, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, socio corrispondente dell'Accademia Gioenia di Catania; prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Torino. — *Via S. Quintino, 45 — Torino.*

1891, 14 giugno. **Vries**, Jan de [Amsterdam (Olanda): 1. 3. 1858], dottore in Scienze matematiche e fisiche, membro della R. Accademia di Scienze di Olanda, della Società Matematica di Amsterdam, della Società provinciale di Belle Arti e Scienze di Utrecht, della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; redattore delle *Wiskundige Opgaven* e della *Revue semestrielle des Pubblications mathématiques;* prof. ord. di Geometria analitica, di Geometria projettiva, di Geometria descrittiva e di Geometria differenziale nell'Università di Utrecht. — *Maliebaan, 43 A — Utrecht (Olanda).*

1898, 27 febbrajo. **Weber**, Eduard Ritter von [Monaco di Baviera: 12. 5. 1870],

DATA DELLA NOMINA.

dottore in Filosofia, libero docente di Matematica nella R. Università di Monaco di Baviera. — *Königinstrasse, 5* — *München (Baviera, Germania)*.

1893, 26 marzo. **Zanotti-Bianco** Ottavio [Pinerolo (Prov di Torino): 15. 9. 1852], ingegnere, socio corrispondente dell'Accademia Properziana del Subasio in Assisi, socio onorario della Società Meteorologica Italiana, membro della Sede Centrale del Club Alpino Italiano; libero docente di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino. — *Via della Rocca, 28* — *Torino*.

MODIFICAZIONI INTERVENUTE DOPO IL 10 LUGLIO 1898.

[Cfr. l'« Annuario » del 1898, ovvero il t. XII dei « Rendiconti », parte prima, pp. VII-XXX].

Soci nuovi.

Almansi, Angelitti, Barack, Bourlet, Calapso, Cassani, Daniele, Del Giudice, Fazzari, Fisher, Guggino, Guerra, Gyldén, Hardcastle, Lebon, Lovett, Lugaro, Martone, Morale, Pascal, Schwatt, Tagliarini, Vacca, Vassilief.

Soci defunti.

Beltrami, Bucca, Fileti, Gugliuzzo.

Dimissionari.

Bassani, Bettazzi, Cassarà, Cavallaro, D'Arone, La Motta di S. Silvestro, Mattina, Rotigliano, Salemi-Pace, Sforza, Spanò, Spelta, Vaněček, Visalli.

Soci perpetui.

Guccia, Halsted, Humbert, Jordan.

Movimento nel numero dei Soci.

Soci al 10 luglio 1898 (vedi l'« Annuario » del 1898)		n° 174
Soci nuovi	n° 24	
Soci defunti e dimissionari	n° 18	
	n° 6	n° 6
Soci al 5 aprile 1900		n° 180

Stato della Società al 5 aprile 1900.

Soci residenti	n° 41
Soci non residenti dimoranti in Italia	n° 100
Soci non residenti dimoranti all'Estero	n° 39
Totale	n° 180

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI PERIODICHE

CON LE QUALI IL CIRCOLO SCAMBIA I SUOI *Rendiconti*.

Amsterdam (Olanda).

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen, door de Leden van het *Wiskundig Genootschap*, ter spreuke voerende: « Een onvermoeide arbeid komt alles te boven ».
Nieuw Archief voor Wiskunde.
Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la *Société Mathématique d'Amsterdam*, par MM. P. H. SCHOUTE (Groningue), D. J. KORTEWEG (Amsterdam), W. KAPTEYN (Utrecht), J. C. KLUYVER (Leyde), P. ZEEMAN (Delft).

Austin (Texas, U. S. A.).

Transactions of the *Texas Academy of Science*.

Baltimore (Maryland, U. S. A.).

American Journal of Mathematics. Edited by SIMON NEWCOMB. Published under the Auspices of the *Johns Hopkins University*.

Berlin (Germania).

Sitzungsberichte der *Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. CRELLE 1826. Herausgegeben von L. FUCHS. Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von CARL OHRTMANN. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren FELIX MÜLLER und ALBERT WANGERIN herausgegeben von EMIL LAMPE.

Bologna (Italia).

Memorie della *R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*. (Memorie della sezione delle Scienze Fisiche e Matematiche).
Rendiconto delle sessioni della *R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*.
Il Bollettino di Matematiche e di Scienze Fisiche e Naturali. Giornale per la coltura dei Maestri delle Scuole Elementari e degli Alunni delle Scuole Normali, diretto da A. CONTI.

Bruxelles (Belgio).

Bulletins de l'*Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*.

Annuaire de l'*Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.*

Cambridge (Inghilterra).

Proceedings of the *Cambridge Philosophical Society.*
Transactions of the *Cambridge Philosophical Society.*

Cambridge (Massachusetts, U. S. A.).

Annals of Mathematics (Founded by ORMOND STONE). Edited by ORMOND STONE, W. E. BYERLY, H. S. WHITE, W. F. OSGOOD, MAXIME BÔCHER. Published under the Auspices of *Harvard University.*

Coimbra (Portogallo).

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, publicado pelo Dr. F. GOMES TEIXEIRA.

Dublin (Irlanda).

Proceedings of the *Royal Irish Academy.*
Transactions of the *Royal Irish Academy.*
« Cunningham Memoirs » of the *Royal Irish Academy.*

Edinburgh (Scozia).

Proceedings of the *Edinburgh Mathematical Society.* Edited by WM. A. LINDSAY, M. A.; C. G. KNOTT, D. Sc., F. R. S. E., and C. TWEEDIE, M. A., B. Sc., F. R. S. E.

Erlangen (Germania).

Sitzungsberichte der *Physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen.*

Gand (Belgio).

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des Écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION et J. NEUBERG.

Genova (Italia).

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche, pubblicato per cura di GINO LORIA.

Göttingen (Germania).

Nachrichten von der *Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen:* Mathematisch-physikalische Classe.

Nachrichten von der *Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*: Geschäftliche Mittheilungen.

Halifax (Nova Scotia, Canada).

Proceedings and Transactions of the *Nova Scotian Institute of Science.*

Hamburg (Germania).

Mittheilungen der *Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*. Redigiert von REPSOLD, SCHRÖDER und BUSCHE.

Helsingfors (Russia).

Bidrag till Kännedom af Finlands Natur och Folk. Utgifna af *Finska Vetenskaps-Societeten.*

Öfversigt af *Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar.*

Acta *Societatis Scientiarum Fennicæ.*

Observations publiées par l'Institut Météorologique Centrale de la *Société des Sciences de Finlande.*

Innsbruck (Tirolo, Austria).

Berichte des *Naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck.*

Kazan (Russia).

Bulletin de la *Société Physico-Mathématique de Kasan.*

Kharkow (Russia).

Annales de l'*Université Impériale de Kharkow.*

Communications de la *Société Mathématique de Kharkow.*

Kiew (Russia).

Journal de l'*Université Impériale de St.-Vladimir de Kiew.*

Kjöbenhavn (Danimarca).

Nyt Tidsskrift for Matematik. Redigeret af dr. phil. C. JUEL og cand. mag. V. TRIER. (A, B).

Krakow (Galizia, Austria).

Pamietnik *Akademii Umiejetności w Krakowie.* Wydzial Matematyczno-Przyrodniczy.

Rozprawy *Akademii Umiejetności*. Wydział Matematyczno-Przyrodniczy.
Bulletin international de l'*Académie des Sciences de Cracovie*. Comptes rendus des séances.

Lawrence (Kansas, U. S. A.).

The Kansas University Quarterly. Series A: Science and Mathematics. Published by the *University of Kansas*.

Leipzig (Germania).

Berichte über die Verhandlungen der *Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*. Mathematisch-Physische Classe.
Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch ALFRED CLEBSCH und CARL NEUMANN. Unter Mitwirkung der Herren PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER, KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER gegenwärtig herausgegeben von FELIX KLEIN in Göttingen, WALTHER DYCK in München, ADOLPH MAYER in Liepzig.
Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch O. SCHLÖMILCH. Gegenwärtig herausgegeben von Dr. R. MEHMKE und Dr. M. CANTOR.
Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von GUSTAF ENESTRÖM.

Liége (Belgio).

Mémoires de la *Société Royale des Sciences de Liége*.

Lisboa (Portogallo).

Annaes do *Club Militar Naval*.

Livorno (Italia).

Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario, fondato da D. BESSO, continuato da A. LUGLI ed attualmente diretto da G. LAZZERI.
Supplemento al Periodico di Matematica. Direttore: G. LAZZERI.

London (Inghilterra).

Proceedings of the *Royal Society of London*.
Philosophical Transactions of the *Royal Society of London*. (A.).
Proceedings of the *London Mathematical Society*.
The Educational Times, and Journal of the College of Preceptors.

Madison (Wisconsin, U. S. A.).

Bulletin of the *Wisconsin Geological and Natural History Survey.*
Transactions of the *Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters.*

Marseille (France).

Annales de la *Faculté des Sciences de Marseille*, publiées sous les auspices de la Municipalité.

Messina (Italia).

Atti della *R. Accademia Peloritana.*

Méxioo (Messico).

Memorias y Revista de la *Sociedad Cientifica « Antonio Alzate »*, publicadas bajo la dirección de RAFAEL AGUILAR Y SANTILLÀN, Secretario general.

Milano (Italia).

Rendiconti del *R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.*
Annali di Matematica pura ed applicata già diretti da FRANCESCO BRIOSCHI e continuati dai professori: EUGENIO BELTRAMI in Roma, LUIGI CREMONA in Roma, ULISSE DINI in Pisa, GIUSEPPE JUNG in Milano.

Modena (Italia).

Memorie della *R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena.*

Moskwa (Russia).

Recueil de la *Société Mathématique de Moscou.*

München (Germania).

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der *k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.*

Napoli (Italia).

Rendiconto dell'*Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (Sezione della *Società Reale di Napoli*).
Atti della *Accademia Pontaniana.*

Giornale di Matematiche di Battaglini, per il progresso degli studi nelle Università Italiane. Fondato nel 1863. Proseguito dal Prof. ALFREDO CAPELLI.

New York (New York, U. S. A.).

Bulletin of the *American Mathematical Society*. Continuation of the « Bulletin of the *New York Mathematical Society* ». A Historical and Critical Review of Mathematical Science. Edited by F. N. COLE, A. ZIWET, F. MORLEY, E. O. LOVETT.

Transactions of the *American Mathematical Society*. Edited by ELIAKIM HASTINGS MOORE, ERNEST WILLIAM BROWN, THOMAS SCOTT FISKE. Published Quarterly by the Society with the Co-operation of *Harvard University, Yale University, Princeton University, Columbia University, Haverford College, Northwestern University, Cornell University, The University of California, Bryn Mawr College, The University of Chicago.*

Odessa (Russia).

Mémoires de la section mathématique de la *Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie.*

Palermo (Italia).

Bullettino della *R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo.*

Atti della *R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo.*

Bollettino Meteorologico del R. Osservatorio di Palermo.

Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo.

Il Circolo Giuridico, rivista di Legislazione e Giurisprudenza, diretta dal professore L. SAMPOLO.

Atti del *Collegio degli Ingegneri e degli Architetti in Palermo.*

Nuovi Annali di Agricoltura Siciliana, redatti dal prof. FERDINANDO ALFONSO, direttore dell'*Istituto Agrario Castelnuovo.*

Il Pitagora. Giornale di Matematica per gli alunni delle scuole secondarie, pubblicato per cura di GAETANO FAZZARI.

Giornale Scientifico di Palermo.

Paris (France).

Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'*Académie des Sciences*, par MM. les Secrétaires perpétuels.

Compte-rendu sommaire de séance de la *Société Philomatique de Paris* (fondée en 1788).

Bulletin de la *Société Philomatique de Paris* (fondée en 1788).

Bulletin de la *Société Mathématique de France*, publié par les Secrétaires.

Comptes Rendus des sessions de l'*Association Française pour l'avancement des Sciences* (fusionnée avec l'*Association Scientifique de France*, fondée par LE VERRIER en 1864).

Journal de l'École Polytechnique, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement.

Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, par un comité de rédaction composé des maîtres de conférences de l'École. Publication fondée en 1864 par PASTEUR et continuée de 1872 à 1884 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE.

Annuaire publié par le *Bureau des Longitudes.*

Revue Scientifique (Revue rose). Directeur: M. CHARLES RICHET.

Revue générale des Sciences pures et appliquées. Directeur: M. LOUIS OLIVIER.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par JOSEPH LIOUVILLE, publié de 1875 à 1884 par H. RESAL; 5ème série publiée par CAMILLE JORDAN, avec la collaboration de M. LÉVY, A. MANNHEIM, É. PICARD, H. POINCARÉ.

Bulletin des Sciences Mathématiques, rédigé par MM. GASTON DARBOUX et JULES TANNERY. Publication fondée en 1870 par MM. G. DARBOUX e J. HOÜEL et continuée de 1876 à 1886 par MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL et J. TANNERY.

Nouvelles Annales de Mathématiques, journal des candidats aux écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, dirigé par C.-A. LAISANT et X. ANTOMARI. Pubblication fondée en 1842 par GERONO et TERQUEM, et continuée par GERONO, PROUHET, BOURGET, et MM. BRISSE et ROUCHÉ.

L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. Directeurs: C.-A. LAISANT et H. FEHR.

L'Intermédiaire des Mathématiciens, dirigé par MM. C.-A. LAISANT et ÉMILE LEMOINE.

Bulletin des Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires, fondé par M. B. NIEWENGLOWSKI, dirigé par MM. L. GÉRARD et G. DE LONGCHAMPS.

Bulletin de Mathématiques spéciales, fondé par M. B. NIEWENGLOWSKI, publié par MM. L. GÉRARD et G. DE LONGCHAMPS.

Pisa (Italia).

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze Fisiche e Matematiche.

Il Nuovo Cimento. Periodico fondato da C. MATTEUCCI e R. PIRIA; continuato da R. FELICI, A. BATTELLI, V. VOLTERRA. Organo della Società italiana di Fisica.

Prag (Boemia, Austria).

Rozpravy *České Akademie Císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění v Praze.* (Scienze Matematiche e Naturali).

Bulletin International. Résumés des Travaux présentés à l'*Académie des Sciences de l'Empereur François Joseph I* (*Česká Akademie Císaře Františka Josefa I*). Sciences Mathématiques et Naturelles.

Jahresbericht der *Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.*

Sitzungsberichte der *Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.* Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe.

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Spolupůsobením odborníků rediguje prof. AUGUSTIN PÁNEK a vydává *Jednota Českých Mathematiků.*

Sborník *Jednoty Českých Mathematiků.*

Roma (Italia).

Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della *R. Accademia dei Lincei.*

Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della *R. Accademia dei Lincei.*

Memorie di Matematica e di Fisica della *Società Italiana delle Scienze* (detta dei XL).

St.-Pétersbourg (Russia).

Bulletin de l'*Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.*

Mémoires de l'*Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.*

Stockholm (Svezia).

Öfversigt af *Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm.* (Note di Matematica).

Bihang till *Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar.*

Astronomiska iakttagelser och undersökningar anstälda på *Stockholms Observatorium,* utgifna af KARL BOHLIN.

Acta Mathematica, journal rédigé par G. MITTAG-LEFFLER.

Stuttgardt (Germania).

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen im Auftrag des *Mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg,* herausgegeben von Dr. O. BÖKLEN und Dr. E. WÖLFFING.

Tōkyō (Giappone).

Tōkyō Sūgaku-Butsurigaku Kwai Kiji.

Torino (Italia).

Atti della *R. Accademia delle Scienze di Torino.*

Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica), publiée par G. PEANO.

Toronto (Canada, America).

Transactions of the *Canadian Institute.*

Proceedings of the *Canadian Institute.*

Toulouse (Francia).

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, pour les sciences mathématiques et les sciences physiques; publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la Faculté, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique et de la Municipalité de Toulouse, avec le concours du Conseil général de la Haute-Garonne.

Venezia (Italia).

Atti del *R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.*

Washington (U. S. A.).

Memoirs of the *National Academy of Sciences.*

Annual Report of the Board of Regents of the *Smithsonian Institution,* showing the Operations, Expenditures and Conditions of the Institution.

Warszawa (Russia).

Prace Matematyczno-Fizyczne. Wydawane przez S. Dickszteina, W. Gosiewskiego, Edw. i W. Natansonow, A. Witkowskiego, i K. Zorawskiego.

Wien (Austria).

Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der *Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.*

Publicationen der *v. Kuffner'schen of Sternwarte in Wien.* Herausgegeben von Dr. Leo de Ball, Director der Sternwarte.

Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht herausgegeben von Prof. G. v. Escherich und Prof. L. Gegenbauer in Wien.

Zaragoza (Spagna).

El Progreso Matemático. Revista de Matemáticas puras y aplicadas. Director: Don Zoel G. de Galdeano.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT DE RÉVOLUTION ROULANT PAR UNE ARÊTE CIRCULAIRE SUR UN PLAN HORIZONTAL; CAS PARTICULIER DU CERCEAU.

Par M. P. **Appell**, à Paris.

Adunanza del 13 agosto 1899.

1. Le problème du roulement d'un corps solide sur un plan horizontal a été étudié par Neumann, par Slesser, par Routh; le cas particulier du cerceau, déjà étudié par Routh, a été repris par M. Carvallo dans un mémoire encore inédit présenté en 1897 au Concours du prix Fourneyron et devant paraitre prochainement dans le Journal de l'École Polytechnique.

Imaginons un solide pesant qui remplisse les conditions suivantes:

1° le solide est terminé par une arête vive ayant la forme d'un cercle K de centre H et de rayon a;

2° le centre de gravité G du corps est situé sur la perpendiculaire Hz élevée par le centre H au plan du cercle K;

3° l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité G est de révolution autour de cette perpendiculaire HGz.

Supposons ensuite que le corps solide ainsi constitué soit assujetti à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe.

J'ai remarqué que l'intégration des équations de ce problème de mécanique peut être ramenée à l'intégration d'une équation linéaire du deuxième ordre suivie de quadratures. Dans le cas particulier où le centre de gravité G se confond avec le centre H du cercle K, le problème se ramène à des quadratures si l'on introduit comme élément analytique la fonction hypergéométrique de Gauss. Ce fait a lieu en particulier pour le mouvement du cerceau. J'ai indiqué sommairement la méthode d'intégration que j'expose ici, dans une publication intitulée « *Les mouvements de roulement en dynamique* » (Collection Scientia, Carré et Naud édi-

teurs, Paris). Quoique les auteurs cités aient donné les équations du mouvement, nous les établirons rapidement pour bien fixer les notations. Je saisis cette occasion pour faire remarquer qu'il s'est glissé une erreur dans les premiers exemplaires du tome II de mon *Traité de Mécanique rationnelle*. Comme exercice sur les équations de Lagrange j'ai reproduit, au n° 452, les principaux résultats d'un mémoire de M. Ernst Lindelöf (Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, t. XXI). Mais, ainsi qu'il résulte des recherches de MM. Vierkandt et Hadamard citées dans ce même n° 452, les résultats de M. Lindelöf sont inexacts. J'ai signalé cette erreur à M. Lindelöf en 1898 et j'ai fait corriger les exemplaires de mon *Traité* en magasin à cette époque: la fin du n° 452 a été modifiée et un n° 452^{bis} ajouté.

2. Soit P le point de contact du cercle K avec le plan fixe. Prenons comme origine mobile G et comme trièdre de référence les axes suivants: 1° la droite Gx parallèle à la droite HP qui joint le centre du cercle K au point de contact P; 2° la droite HGz normale au plan du cercle K; 3° la droite Gy perpendiculaire au plan zGx.

Désignons par θ l'angle de Gz avec la verticale ascendante Gz_1 et par ψ l'angle de Gy avec une horizontale fixe. Ces deux angles déterminent l'orientation du trièdre $Gxyz$. La rotation instantanée ω' de ce trièdre est la résultante d'une rotation $\frac{d\theta}{dt}$ autour de Gy et d'une rotation $\frac{d\psi}{dt}$ autour de Gz_1. On a donc, en appelant p', q', r' les composantes de cette rotation ω' suivant Gx, Gy, Gz:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} p' &= -\frac{d\psi}{dt}\sin\theta, \\ q' &= \frac{d\theta}{dt}, \\ r' &= \frac{d\psi}{dt}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Pour fixer la position du corps solide par rapport au trièdre $Gxyz$, il suffit de connaître l'angle φ que fait un rayon du cercle K, invariablement lié au corps, avec l'axe Gy. La rotation instantanée ω du corps est alors la résultante de la rotation ω' du trièdre et d'une rotation $\frac{d\varphi}{dt}$ autour de Gz. Les composantes p, q, r de ω sont donc:

$$(\omega)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= p' = -\frac{d\psi}{dt}\sin\theta,\\ q &= q' = \frac{d\theta}{dt},\\ r &= r' + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Appelons u, v, w les projections de la vitesse du centre de gravité G sur Gx, Gy, Gz. D'après des formules connues, les projections de l'accélération du point G sur ces mêmes axes sont

$$\frac{du}{dt} + q'w - r'v, \ldots \text{ etc.}$$

Cela posé, les forces appliquées au corps sont, en prenant la masse du corps pour unité :

1° le poids g appliqué en G et ayant pour projections sur Gx, Gy, Gz:

$$g\sin\theta, \qquad 0, \qquad -g\cos\theta;$$

2° la réaction du plan appliquée en P et ayant pour projections :

$$X, \qquad Y, \qquad Z.$$

Équations du mouvement du centre de gravité :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + q'w - r'v = g\sin\theta + X\\ &\frac{dv}{dt} + r'u - p'w = Y\\ &\frac{dw}{dt} + p'v - q'u = -g\cos\theta + Z. \end{aligned}\right.$$

Équations du mouvement autour du centre de gravité.—Soient A, A, C les moments d'inertie du corps par rapport aux axes Gx, Gy, Gz. Soit dans le mouvement relatif du corps autour de G, $G\sigma$ le moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point G; ce vecteur $G\sigma$ a pour projections :

$$\sigma_x = Ap, \qquad \sigma_y = Aq, \qquad \sigma_z = Cr.$$

Prenons, d'autre part, le moment résultant GS des forces par rapport à G; si l'on désigne par a le rayon HP du cercle K et par c la distance HG, le point de contact P a pour coordonnées, par rapport aux axes G, x, y, z:

$$x = a, \qquad y = 0, \qquad z = c.$$

Les moments de la réaction par rapport aux axes G, x, y, z sont alors :

$$-cY, \qquad cX - aZ, \qquad aY;$$

ceux du poids sont nuls. Le moment résultant GS a donc pour projections :

$$S_x = -cY, \qquad S_y = cX - aZ, \qquad S_z = aY.$$

Pour exprimer le théorème des moments, on écrit que la vitesse relative du point σ par rapport à des axes de directions fixes menées par G est égale à GS. On a donc

$$\frac{d\sigma_x}{dt} + q'\sigma_z - r'\sigma_y = S_x,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

c'est-à-dire, comme $q' = q$, $p' = p$:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} + (Cr - Ar')q = -cY, \\ &A\frac{dq}{dt} - (Cr - Ar')p = cX - aZ, \\ &C\frac{dr}{dt} = aY. \end{aligned} \right.$$

Conditions géométriques.—Pour exprimer que la circonférence K roule sur le plan, il faut écrire que la vitesse du point matériel P au contact est nulle. Cette vitesse étant la résultante de la vitesse u, v, w de G et de la vitesse due à la rotation du corps autour de G, on a :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &u + qc = 0, \\ &v + ar - pc = 0, \\ &w - aq = 0, \end{aligned} \right.$$

car le point P a pour coordonnées

$$x = a, \qquad y = 0, \qquad z = c.$$

Remplaçons u, v, w par ces valeurs dans les équations (1), puis remplaçons Y par la valeur $\frac{C}{a}\frac{dr}{dt}$ dans la deuxième des équations (1) et la première des équations (2), nous avons les deux équations :

$$Aa\frac{dp}{dt} + a(Cr - Ar')q + Cc\frac{dr}{dt} = 0,$$

$$a\left(c\frac{dp}{dt} - a\frac{dr}{dt}\right) - a(cr' + ap)q - C\frac{dr}{dt} = 0.$$

Si, dans ces équations, on remplace q par $\frac{d\theta}{dt}$ et r' par sa valeur $-p\cot\theta$, telle qu'elle résulte des relations definissant ω' et ω, on a enfin les deux équations linéaires simultanées :

$$(4)\qquad \begin{cases} Aa\dfrac{dp}{d\theta}+Cc\dfrac{dr}{d\theta}+Car+Aap\cot\theta=0, \\ ac\dfrac{dp}{d\theta}-(C+a^2)\dfrac{dr}{d\theta}-a^2p+acp\cot\theta=0 \end{cases}$$

définissant p et r en fonction de θ. On en déduit, par l'élimination de $\dfrac{dp}{d\theta}$:

$$(5)\qquad Aa^2p=-(Aa^2+Cc^2+AC)\frac{dr}{d\theta}-Cacr,$$

puis

$$(6)\qquad \frac{d^2r}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dr}{d\theta}+\frac{Ca}{Aa^2+Cc^2+AC}(c\cot\theta-a)r=0.$$

Cette équation donne r en fonction de θ; la précédente donne p. En lui adjoignant l'équation des forces vives:

$$u^2+v^2+w^2+A(p^2+q^2)+Cr^2=-2g(a\sin\theta-c\cos\theta)+h,$$

on obtient θ en fonction de t par une quadrature.

3. *Cas particulier où $c=0$. Cerceau.*—Lorsque le point G coïncide avec le centre H du cercle, on a $c=0$. Dans ce cas r est déterminé par l'équation linéaire:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dr}{d\theta}-\frac{Ca^2}{A(C+a^2)}r=0,$$

qui devient, par la substitution

$$(7)\qquad \cos^2\theta=s,$$

$$(8)\qquad s(1-s)\frac{d^2r}{ds^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}s\right)\frac{dr}{ds}-\frac{Ca^2}{4A(C+a^2)}r=0.$$

Cette équation est celle de la série hypergéométrique de Gauss, dans laquelle

$$(9)\qquad \gamma=\frac{1}{2},\qquad \alpha+\beta=\frac{1}{2},\qquad \alpha\beta=\frac{Ca^2}{4A(C+a^2)}.$$

On sait que l'intégrale générale de l'équation de Gauss (*Œuvres complètes*, t. III, p. 210) est

$$\lambda F(\alpha,\beta,\gamma,x)+\mu x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x),$$

λ et μ désignant deux constantes arbitraires.

Donc l'expression de r est

$$r=\lambda F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2},\cos^2\theta\right)+\mu\cos\theta F\left(\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cos^2\theta\right).$$

On a ensuite

$$p=-\frac{C+a^2}{a^2}\frac{dr}{d\theta},$$

ce qui donne également p exprimé par des séries hypergéométriques.

Enfin l'équation des forces vives donne t en fonction de θ par une quadrature.

4. *Cas général: Corps pesant de révolution de forme quelconque.* — Faisons rouler et pivoter, sur un plan horizontal, un corps homogène pesant de révolution de *forme quelconque*. Prenons encore comme origine du trièdre de référence le centre de gravité G, comme axe Gz l'axe de révolution, comme axe Gx la ligne de plus grande pente du plan perpendiculaire à Gz, et comme axe Gy l'horizontal de ce plan. Les équations du mouvement sont encore les équations (1), (2) et (3), avec cette seule différence que les coordonnées a et c du point de contact du corps avec le plan, au lieu d'être *constantes*, sont des *fonctions de* θ dépendant de la forme extérieure du corps *). L'élimination de Y conduira encore à des équations linéaires et homogènes, définissant p et r en fonction de θ. L'une quelconque des quantités p et r sera définie en fonction de θ par une équation linéaire et homogène du deuxième ordre qui se réduira à (6) quand on supposera a et c constants. Peut-être cette équation pourra-t-elle être intégrée pour une forme particulière du corps.

NOTE ADDITIONNELLE.

Après l'achèvement d'une première rédaction de cet article, dans laquelle je traitais seulement le cas $c = 0$, en indiquant comme probable que la même méthode s'appliquerait au cas $c \neq 0$, j'ai pris connaissance d'un travail de M. Korteweg, professeur à l'Université d'Amsterdam, qu'il vient de publier dans le « Nieuw Archief voor Wiskunde », 2e série, tome IV, livraison de Juillet. De ce travail il résulte que, par une rencontre curieuse, M. Korteweg s'est occupé en même temps que moi de la résolution du même problème à l'aide des fonctions hypergéométriques.

M. Korteweg à qui j'avais envoyé cette première rédaction m'a prié de ne pas la supprimer, d'autant moins qu'il avait donné ses résultats sans démonstration et laissé passer pour l'un d'entre eux une faute de calcul. Il m'a engagé à apporter à mon article le changement que j'avais entrevu et qui n'avait rien de commun avec son travail et à y ajouter de sa part ce qui va suivre.

St.-Germain-en-Laye (Seine-et-Oise).
27 juillet 1899.

P. APPELL.

*) Voyez mon opuscule: *Sur les mouvements de roulement*, n° 17.

EXTRAIT D'UNE LETTRE À M. APPELL.

Par M. D. J. **Korteweg**, à Amsterdam.

Adunanza del 13 agosto 1899.

. . . .

Votre solution :

$$r = \lambda F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, \cos^2\theta\right) + \mu \cos\theta\, F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2\theta\right)$$

est identique, comme il est facile de le vérifier à la seconde de celles que j'ai communiquées dans le n° 12 de mon article. Seulement, en conséquence d'une erreur de calcul on doit substituer dans ma formule (53)

$$K = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - k} \quad \text{et} \quad K' = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - k}$$

au lieu de

$$\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} - k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{4} - k}.$$

Quant à la solution que je donne en première ligne, elle peut encore se rattacher facilement à votre équation :

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \operatorname{cotg}\theta \frac{dr}{d\theta} - \frac{C a^2}{A(C + a^2)} r = 0.$$

Cette équation en effet se transforme, par la substitution

$$\cos\theta = x,$$

dans

$$(10) \qquad (1 - x^2)\frac{d^2 r}{dx^2} - 2x\frac{dr}{dx} - \frac{C a^2}{A(C + a^2)} r = 0,$$

équation qui m'a servi de point de départ à moi et qui est identique à ma formule (51).

Par les substitutions

$$x = \pm (1 - 2t),$$

celle-ci devient

$$t(1-t)\frac{d^2r}{dt^2}+(1-2t)\frac{dr}{dt}-\frac{Ca^2}{A(C+a^2)}r=0.$$

Sous cette forme elle s'identifie avec celle de la série hypergéométrique, en posant

$$(11) \qquad \gamma'=1, \quad \alpha'+\beta'=1, \quad \alpha'\beta'=\frac{Ca^2}{A(C+a^2)}.$$

Elle possède donc l'intégrale particulière

$$F(\alpha', \beta', 1, t).$$

En substituant successivement dans cette intégrale:

$$t=\frac{1}{2}(1\pm x),$$

on obtient l'intégrale générale de l'équation (10) sous la forme:

$$(12) \quad r=\lambda' F\left[\alpha', \beta', 1, \frac{1}{2}(1+x)\right]+\mu' F\left[\alpha', \beta', 1, \frac{1}{2}(1-x)\right].$$

$$(x=\cos\theta)$$

Cette solution peut présenter des avantages dans des cas particuliers. J'ai en vue les cas où θ peut atteindre l'une des valeurs 0° ou 180°, ou s'en approcher indéfiniment.

En *premier lieu* elle nous avertit que le même mouvement ne peut pas contenir ces deux valeurs, si, du moins, r n'est pas constamment égal à zéro. Car, si λ' diffère de zéro, la substitution $x=1$, et si μ' en diffère la substitution $x=-1$, conduirait à une valeur infinie de r parce qu'alors l'argument de la série devient égal à l'unité positive, tandis que $\alpha'+\beta'-\gamma'$ est égal à zéro.

Or il est clair qu'à une valeur infinie de r correspondrait une valeur infinie de la force vive, valeur qu'elle ne peut pas prendre.

En *second lieu* elle nous apprend que, pour que θ puisse atteindre par exemple la valeur $\theta=0°$, la constante λ' doit être égale à zéro.

L'expression pour r se réduit donc, dans ce cas, à la forme plus simple:

$$r=\mu' F\left[\alpha', \beta', 1, \frac{1}{2}(1-x)\right].$$

Il sera inutile d'ajouter qu'un mouvement contenant $\theta=0°$ ne serait pratiquement réalisable jusqu'au bout, que dans des cas comme celui du cerceau, où toute la masse est concentrée dans un seul plan.

Amsterdam, juillet 1899.

D. J. KORTEWEG.

SULLA CORREZIONE DA FARE ALLE LATITUDINI OSSERVATE PER TENER CONTO DELL'ALTEZZA DEI PUNTI DI STAZIONE SUL LIVELLO DEL MARE.

Nota di P. Pizzetti, in Genova.

Adunanza del 23 luglio 1899.

1. Il compianto prof. Pucci pubblicò nel 1882 nelle *Astronomische Nachrichten*, e poi riportò nel 1° volume dei suoi *Fondamenti di Geodesia*, un metodo per la riduzione delle latitudini da una superficie di livello ad un'altra, il quale si fonda sulla ipotesi che le superficie di livello terrestri siano *ellissoidi simili e concentrici*.

Una tale ipotesi è erronea, come è noto a chi abbia qualche famigliarità colla teoria fisico-matematica della figura della terra. La questione della forma delle superficie di livello esterne al Geoide è chiaramente trattata nel 2° volume della *Höhere Geodäsie* di Helmert pubblicato fin dal 1884, e dopo quella magistrale pubblicazione non varrebbe forse la pena di tornare sopra questo argomento, se non si vedesse ripetuta ancora, in qualche recente lavoro, la svista del Pucci. Segno evidente che la lodata opera di Helmert non va per le mani degli studiosi quanto lo meriterebbe.

Ci permettiamo di dare qui la formola teorica di Helmert per la riduzione delle latitudini al livello del mare, deducendola da altre formole da noi stabilite in altro lavoro, e aggiungendovi qualche considerazione. È ben vero che raramente accadrà che quella formola teorica dia un termine di correzione del quale valga la pena di tener conto, ma ciò non giustifica che si abbia a usare, in quei casi in cui lo si fa, una formola errata invece che una giusta.

2. Chiamiamo V il potenziale dell'attrazione terrestre sopra un punto x, y, z; f la costante dell'attrazione; ω la velocità angolare della rotazione

diurna della terra. Allora l'equazione della superficie di livello è:

$$U = fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{costante}, \tag{1}$$

supposto che l'asse delle z coincida con quello della rotazione.

Ho dimostrato nei Rendiconti dell'Acc. dei Lincei del 1894 *), che se si ammette a priori che una delle superficie di livello esteriori alla massa terrestre sia un ellissoide di rotazione (che chiameremo *ellissoide fondamentale*), il cui asse coincida con quello della rotazione diurna, allora la funzione V, per tutti i punti esterni al detto ellissoide (e indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla interna distribuzione delle masse terrestri) ha l'espressione

$$\begin{aligned} V = &\left(M + \frac{2}{3}\pi\rho a^2 b\right)\frac{\operatorname{arc\,tg} E}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2\pi\rho a^2 b}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}(E - \operatorname{arc\,tg} E)z^2 \\ &- \frac{\pi\rho a^2 b}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\operatorname{arc\,tg} E - \frac{E}{1 + E^2}\right)(x^2 + y^2), \end{aligned} \tag{2}$$

dove: a e b sono i semiassi dell'ellissoide fondamentale; M è la massa della terra; ρ è una quantità ausiliaria, legata alla $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$ dalla relazione

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = \frac{3 + \varepsilon^2}{\varepsilon^3}\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2}; \tag{3}$$

e finalmente

$$E = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}}, \tag{4}$$

essendo λ una funzione di x, y, z espressa dalla maggior radice della equazione

$$\frac{z^2}{b^2 + \lambda} + \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} = 1. \tag{5}$$

Nel caso pratico, in cui ε ha un piccolo valore, conviene sviluppare le precedenti formole secondo le potenze di ε^2. Si ha così, chiamando r il raggio vettore e θ la colatitudine geocentrica del punto (x, y, z), ossia l'angolo che il raggio vettore fa coll'asse polare, in luogo delle (5), (4), (3), le

$$b^2 + \lambda = r^2 - \varepsilon^2 b^2 \operatorname{sen}^2\theta + \ldots \tag{5'}$$

*) Pizzetti, *Sulla espressione della gravità alla superficie del Geoide supposto ellissoidico*. Rendic. Acc. dei Lincei, 1° semestre 1894.

$$(4') \qquad E = \frac{b\varepsilon}{r}\left(1 + \frac{b^2\varepsilon^2}{2r^2}\operatorname{sen}^2\theta\right) + \ldots$$

$$(3') \qquad 2\pi\rho\varepsilon^2 = \frac{15}{4}\frac{\omega^2}{f} + \ldots$$

E nello stesso ordine d'approssimazione:

$$\operatorname{arc\,tg} E = \frac{b\varepsilon}{r} + \frac{b^3\varepsilon^3}{r^3}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots$$

$$E - \operatorname{arc\,tg} E = \frac{b^3\varepsilon^3}{3r^3} + \frac{b^5\varepsilon^5}{2r^5}\left(\operatorname{sen}^2\theta - \frac{2}{5}\right) + \ldots$$

$$\operatorname{arc\,tg} E - \frac{E}{1+E^2} = \frac{2}{3}\frac{b^3\varepsilon^3}{r^3} + \frac{b^5\varepsilon^5}{r^5}\left(\operatorname{sen}^2\theta - \frac{4}{5}\right) + \ldots$$

E sostituendo nella (2) nella quale porremo pure

$$x^2 + y^2 = r^2\operatorname{sen}^2\theta, \qquad z = r\cos\theta,$$

e introducendo poi l'espressione ottenuta di V nella (1), abbiamo

$$U = \frac{Mf}{r} + \frac{b^2 Mf}{6r^3}(3\operatorname{sen}^2\theta - 2)\left(\varepsilon^2 - \frac{b\,a^2\omega^2}{Mf}\right) + \frac{\omega^2 r^2\operatorname{sen}^2\theta}{2}.$$

In questa formola sono trascurate le quantità dell'ordine di ε^4 e degli ordini superiori. Trascurando poi anche le quantità che contengono a fattore $\varepsilon^2\omega^2$ e osservando che in luogo di $\frac{Mf}{a^2}$ si può dentro l'ultima parentesi porre la *gravità equatoriale* g_a, si ottiene

$$(6) \qquad U = \frac{Mf}{r} + \frac{b^2 fM}{6r^3}(3\operatorname{sen}^2\theta - 2)\left(\varepsilon^2 - \frac{a\omega^2}{g_a}\right) + \frac{\omega^2 r^2\operatorname{sen}^2\theta}{2}.$$

[Non è difficile verificare che questa espressione di U equivale, nel nostro ordine di approssimazione, a quella data dalla formula (1) a pag. 75 del 2° volume di Helmert, ove si tenga conto delle (10), (11), (12) a pag. 76].

L'espressione della gravità si ottiene, sempre colla stessa approssimazione, colla formula

$$g = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

e quindi

$$g = \frac{Mf}{r^2} + \frac{Mfb^2}{2r^4}(3\operatorname{sen}^2\theta - 2)\left(\varepsilon^2 - \frac{a\omega^2}{g_a}\right) - \omega^2 r\operatorname{sen}^2\theta.$$

Posto successivamente $r = a$, $\theta = 90°$; $r = b$, $\theta = 0$, si hanno i valori g_a, g_b della gravità all'equatore e al polo, rispettivamente, sull'ellissoide fondamentale. E sottraendo si ottiene senza difficoltà, a meno di termini in ε^4, $\varepsilon^2\omega^2$:

$$g_b - g_a = \frac{Mf}{a^2}\varepsilon^2 - \frac{3Mf}{a^2}\left(\varepsilon^2 - \frac{a\omega^2}{g_a}\right) - \omega^2 a$$

(7)
$$\frac{g_b - g_a}{g_a} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_a} - \frac{\varepsilon^2}{2},$$

che esprime il notissimo teorema di Clairaut, giacchè $\frac{\omega^2 a}{g_a}$ è il rapporto fra la forza centrifuga e la gravità all'equatore, mentre $\frac{\varepsilon^2}{2}$ misura, nel nostro ordine d'approssimazione, lo schiacciamento dell'ellissoide fondamentale

$$s = \frac{a-b}{a}.$$

$\left(\text{L'espressione esatta di } s \text{ sarebbe } s = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}-1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right).$

3. Senza alterare l'ordine d'approssimazione, la (6) può scriversi, risolvendola rispetto ad r,

(6') $$r = \frac{Mf}{U} + \frac{b^2 U}{6Mf}(3\,\mathrm{sen}^2\theta - 2)\left(\varepsilon^2 - \frac{a\omega^2}{g_a}\right) + \frac{\omega^2 M^3 f^3\,\mathrm{sen}^2\theta}{2U^3}.$$

E poichè le varie superficie di livello esteriori all'ellissoide fondamentale si ottengono ponendo $U = \text{cost.}$, è ben chiaro che tali superficie *non sono omotetiche* rispetto all'origine delle coordinate. Occorrerebbe, per questo, che il rapporto fra due valori di r ottenuti dalla (6') per due valori diversi di U e per uguali valori di θ, fosse indipendente da θ, il che evidentemente non è.

Ma più nitidamente possiamo vedere la cosa in questo modo.

Siano $a + \delta a$, $b + b\delta$ i semiassi equatoriale e polare di una superficie di livello infinitamente prossima all'ellissoide fondamentale. Per notissimi principii della teoria del potenziale avremo

$$\frac{\delta a}{\delta b} = \frac{g_b}{g_a},$$

donde tenuto conto della (7),

(8)
$$\frac{\delta a - \delta b}{\delta b} = \frac{g_b - g_a}{g_a} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_a} - s.$$

Se le due superficie (a, b), $(a + \delta a, b + \delta b)$ fossero simili, si dovrebbe avere

$$\frac{\delta a}{\delta b} = \frac{a}{b},$$

od anche, poichè $b = a(1 - s)$,

$$\frac{\delta a - \delta b}{\delta b} = \frac{a - b}{b} = \frac{s}{1 - s}. \tag{8'}$$

Ora per dati numerici ben noti si ha

$$\frac{g_b - g_a}{g_a} = 0{,}00531, \qquad \frac{s}{1 - s} = 0{,}00335.$$

La (8') contraddice dunque alla (8), epperò l'ipotesi della omoteticità delle superficie di livello non può ammettersi *neppure per approssimazione.*

4. Consideriamo un punto A elevato della quantità h sull'ellissoide fondamentale E, che intenderemo confuso colla superficie di livello medio dei mari. Sia S la superficie di livello per A, e conduciamo per A le rette An', An normali alle superficie E, S rispettivamente. La An' incontra l'ellissoide E in un punto A' che diremo *projezione* di A. Chiamiamo φ e $\varphi + \psi$ gli angoli che le An', An rispettivamente fanno col piano dell'equatore. Sarà $-\psi$ la correzione da farsi alla latitudine osservata in A per tener conto del difetto di parallelismo delle superficie di livello, ossia *il termine di riduzione della latitudine al livello del mare.* La (6) dimostra che le superficie di livello poco discoste dall'ellissoide fondamentale possono, nel solito ordine di approssimazione, considerarsi come ellissoidi concentrici e conassici. Chiamiamo a e b, $a + \delta a$, $b + \delta b$ i semiassi delle superficie E ed S rispettivamente, e siano x, y le coordinate cartesiane del punto A'; $x + dx$, $y + dy$ quelle del punto A' rispetto ad un asse nel piano dell'equatore e all'asse polare. Avremo:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{x} \frac{a^2}{b^2},$$

$$\operatorname{tang} (\varphi + \psi) = \frac{y + \delta y}{x + \delta x} \frac{(a + \delta a)^2}{(b + \delta b)^2}.$$

E, a meno di quantità piccole del 2° ordine rispetto ai δ e a ψ,

$$\frac{\psi}{\cos^2 \varphi} = \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\delta y}{x} - \frac{y \delta x}{x^2} \right) + 2 \frac{a y}{b^3 x} (b \delta a - a \delta b).$$

Ora, posto $AA' = h$, abbiamo

$$\delta x = h \cos \varphi, \qquad \delta y = h \operatorname{sen} \varphi,$$

e di più, detta e l'eccentricità dell'ellissoide E:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \qquad y = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$b = a\left(1 - \frac{e^2}{2} + \ldots\right).$$

Così la (8) dà, a meno di termini in e^4,

$$\frac{\psi}{\cos^2\varphi} = \frac{e^2 b \operatorname{tang}\varphi}{a} + \frac{2 \operatorname{tang}\varphi}{a}(\delta a - \delta b) - \frac{e^2 \operatorname{tang}\varphi}{a}\delta b,$$

od anche, osservando che, senza alterare il grado di approssimazione, si può nel 2° membro moltiplicare gli ultimi due termini pel rapporto $\frac{b}{\delta b}$:

$$\psi = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{a}\frac{\delta a - \delta b}{\delta b}b,$$

ovvero, ricordando il valore trovato del rapporto $\frac{\delta a - \delta b}{\delta b}$ ed esprimendo ψ in secondi:

(9) $\psi'' = b\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{a \operatorname{arc} 1''}\frac{g_1 - g_a}{g_a} = 0{,}00531\,\frac{b}{a}\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{\operatorname{arc} 1''} = 0'', 000172\, b \operatorname{sen} 2\varphi,$

supposto b espresso in metri. Abbiamo ottenuta così la formola data da Helmert a pag. 99 del vol. II della *Höh. Geodäsie.*

Colla ipotesi degli ellissoidi omotetici si ha invece

$$\psi'' = 0'', 000108\, b \operatorname{sen} 2\varphi.$$

5. La formola (9) può anche subito dedursi come caso particolare dalla prima delle due formole generali da me date nel n° 3310 delle *Astron. Nachrichten.* Quelle formole sono:

(10) $\delta\varphi'' = -\frac{b}{a g}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{1}{\operatorname{arc} 1''}, \qquad \delta\omega'' = -\frac{b}{a g \cos^2\varphi}\frac{\partial g}{\partial\omega}\frac{1}{\operatorname{arc} 1''},$

essendo $\delta\varphi$, $\delta\omega$ le correzioni da fare alla latitudine e alla longitudine osservate in A, per avere quelle di A', e $\frac{\partial g}{\partial\varphi}, \frac{\partial g}{\partial\omega}$ sono le derivate, prese rispetto alla latitudine e alla longitudine, della gravità ridotta al livello del mare.

Secondo la nostra notazione attuale $\delta\varphi = -\psi$, e poichè nell'ipotesi che il Geoide sia confuso coll'Ellissoide di rotazione si ha

$$g = g_a(1 + 0, 00531 \operatorname{sen}^2\varphi),$$

la prima delle (10) si riduce, nel nostro ordine di approssimazione, alla (9) mentre la seconda dà

(9′) $$\delta\omega = 0.$$

In realtà le formole (10) forniscono *l'unico modo* per ridurre le posizioni astronomiche al livello del mare. Le deviazioni locali fra il Geoide e l'Ellissoide fanno sì che i risultati forniti dalle (9), (9′) differiscono dai veri, dati dalle (10), di quantità *dello stesso ordine di grandezza*

delle correzioni stesse che si tratta di calcolare. Riportiamo l'esempio numerico dato nella ora citata nostra Nota. Per un punto centrale della penisola istriana si ottiene dalla (10), in base alle misure di gravità fatte dalla I. R. Marina Austriaca,

$$\delta\varphi'' = -0'', 00043\, h, \qquad \delta\omega'' = 0'', 00023\, h,$$

mentre le (9), (9') danno (essendo circa $\varphi = 45°$)

$$\delta\varphi'' = -0, 00017\, h, \qquad \delta\omega'' = 0.$$

Ripetiamo quindi quanto più volte è stato detto, che cioè una razionale soluzione del problema geodetico non si potrà avere se non quando nella regione che si tratta di studiare sia conosciuto, almeno per approssimazione, il modo di variare della gravità secondo il meridiano e secondo il parallelo.

Genova, 11 luglio 1899.

P. PIZZETTI.

UN TEOREMA SOPRA IL COVARIANTE S DELLA QUARTICA PIANA.

Nota di **Edgardo Ciani**, in Messina.

Adunanza del 23 luglio 1899.

È noto che Clebsch chiamò col nome di covariante S di una quartica piana il luogo dei punti le cui cubiche polari sono equianarmoniche *).

Servendosi di una denominazione di Caporali, che indicò col nome di polohessiana di un punto la hessiana della cubica polare del punto **), si può dire che il covariante S è il luogo dei punti le cui polohessiane si spezzano in tre rette. Se il punto è generico sopra S, tali tre rette hanno posizione generica e compongono il triangolo polohessiano del punto. I vertici di questo triangolo appartengono nuovamente ad S. Il covariante S è del quarto ordine e se la quartica fondamentale non è particolare, esso non ha punti doppi ***). Nasce dunque la questione di sapere se può mai accadere che una quartica coincida col proprio covariante S. Un esempio di questa coincidenza è citato dal Brioschi †) ed è realizzato da una ben nota curva del 4^o ordine, la cui esistenza fu rilevata la prima volta da Klein ††). È la quartica

*) Clebsch, *Ueber Curven vierter Ordnung*. Crelle's Journal, Bd. 57.

**) Caporali, *Memorie di Geometria* (Frammenti sulla teoria delle curve piane del quarto ordine).

***) Ciani, *Sopra due curve invariantive della quartica piana*. Annali di Matematica, t. XX, 1892.

†) Brioschi, *Sopra una classe di curve del 4^o ordine*. Atti della R. Acc. dei Lincei, s. III, vol. VIII.

††) Klein, *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen*. Mathematische Annalen, Bd. XIV.

invariante rispetto al noto gruppo G_{168} di collineazioni piane. Essa gode la proprietà che ogni tangente di flesso la incontra ulteriormente in un flesso in guisa che, con opportuna ed evidente scelta degli elementi di riferimento, la sua equazione può scriversi così:

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0.$$

Noi la chiameremo per brevità « *la quartica di Klein* ».

Non si conosce nessun altro esempio della coincidenza sopra indicata. Ebbene ci proponiamo di dimostrare adesso che fra le quartiche irriduttibili non ve ne possono essere altri e che fra quelle riduttibili il solo esempio possibile è quello della conica doppia, che, cioè, sussiste il seguente teorema:

Le sole quartiche piane capaci di coincidere col proprio covariante S sono: la quartica di Klein e la conica doppia.

(L'enunciato stesso del teorema esclude le quartiche che hanno S indeterminato.)

1. Cominciamo dal considerare le quartiche irriduttibili. La ipotesi della irriduttibilità regge i n[i] 1, 2, 3.

Supponiamo dapprima che la quartica abbia almeno un flesso distinto da un punto doppio. Sia (0 0 1) tale flesso, $x_1 = 0$ la sua tangente e $x_3 = 0$ la polare armonica.

Allora l'equazione della quartica C_4 sarà della forma:

$$\begin{aligned} C_4 \equiv 4\,x_1 x_3^3 &+ x_3(4\,a x_1^3 + 12\,b x_1^2 x_2 + 12\,c\,x_1 x_2^2 + 4\,d x_2^3) \\ &+ m x_1^4 + 4\,p x_1^3 x_2 + 6\,q x_1^2 x_2^2 + 4\,r x_1 x_2^3 + n x_2^4 = 0. \end{aligned}$$

Se $d = 0$, il flesso (0 0 1) è un punto di ondulazione. Escludiamo per ora che d sia nullo. La polohessiana P_h del flesso è:

$$P_h \equiv x_1^3(ac - b^2) + x_1^2 x_2(ad - bc) + x_1 x_2^2(bd - c^2) - c x_1 x_3^2 - d x_2 x_3^2 = 0.$$

Essa passa per (0 0 1), come è ben naturale, perchè ogni punto della hessiana appartiene alla propria polohessiana. Se C_4 deve coincidere col proprio covariante S, bisogna intanto che P_h si componga di tre rette di cui una almeno passerà per (0 0 1). Questa non può essere la $x_1 = 0$ altrimenti è $d = 0$ contro la ipotesi. Dunque potremo prenderla come $x_2 = 0$. Allora esigendo che da P_h si stacchi $x_2 = 0$, si trova $c = 0$, $b = 0$. La C_4 diviene:

$$\begin{aligned} C_4 \equiv 4\,x_1 x_3^3 + 4\,x_3(a x_1^3 + d x_2^3) &+ m x_1^4 + 4\,p x_1^3 x_2 \\ &+ 6\,q x_1^2 x_2^2 + 4\,r x_1 x_2^3 + n x_2^4 = 0, \end{aligned}$$

e la P_2 si compone di un triangolo di cui i vertici sono

$$(1, 0, \sqrt{a}), \qquad (1, 0, -\sqrt{a}), \qquad (0, 1, 0).$$

Questi vertici appartengono nuovamente a S, quindi debbono appartenere anche a C_4. Si hanno così le ulteriori condizioni

$$a = 0, \qquad m = 0, \qquad n = 0,$$

e C_4 si riduce a:

$$C_4 = 4x_1x_3^3 + 4dx_3x_2^3 + 4px_1^3x_2 + 6qx_1^2x_2^2 + 4rx_1x_2^3 = 0.$$

La polare cubica di $(1\,0\,0)$ è il triangolo

$$x_3[p^2x_1^2 + pqx_1x_2 + x_2^2(q^2 - pr)] = 0,$$

uno dei suoi vertici, cioè $(0\,0\,1)$, è già sopra C_4. Perchè ci siano gli altri due, debbono le due equazioni

$$2px_1^2 + 3qx_1x_2 + 2rx_2^2 = 0,$$

$$p^2x_1^2 + pqx_1x_2 + (q^2 - pr)x_2^2 = 0$$

avere le stesse radici in $\frac{x_1}{x_2}$. Si hanno quindi le condizioni:

$$\frac{p^2}{2p} = \frac{pq}{3q} = \frac{q^2 - pr}{2r}.$$

Risulta subito che è impossibile soddisfarle con $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Se $p = 0$, anche $q = 0$, ma allora calcolando il covariante S si vede che è costituito da due rette doppie e quindi la coincidenza voluta non avviene certo perchè C_4 è supposta irriducibile. Sarà dunque $q = 0$ e $p \neq 0$. Ma in tal caso anche $r = 0$ e quindi

$$C_4 \equiv x_1x_3^3 + px_2x_1^3 + dx_3x_2^3 = 0,$$

che è la quartica di Klein.

2. Supponiamo ora $d = 0$. L'invariante S della cubica polare di $(0\,0\,1)$ è in questo caso: c^2. Dunque $c = 0$.

Si può anche ammettere senza portare restrizioni di sorta che $(1\,0\,0)$ sia sulla C_4: onde $m = 0$ e rimane

$$C_4 \equiv 4x_2x_3^3 + x_3(4ax_1^3 + 12bx_1^2x_2) + 4px_1^3x_2 + 6qx_1^2x_2^2 + 4rx_1x_2^3 + nx_2^4 = 0.$$

Calcolando il covariante S si trova *):

*) Cfr. ad es. Clebsch-Lindemann, *Leçons sur la Géométrie*, traduites par A. Benoist, vol. II, pag. 283. Si avverta ivi un errore di calcolo e cioè: il 1° a_{333} che si trova nella formula esprimente S deve essere invece a_{233}.

$$\begin{aligned} S \equiv {} & [(qy_1 + ry_2)y_3 - b^2 y_1^2]^2 \\ & + y_1(ry_1 + ny_2)[(py_1 + qy_2 + by_3)(ay_1 + by_2) - by_1(py_2 + ay_3)] \\ & + y_1(qy_1 + ry_2)[(py_1 + qy_2 + by_3)by_1 - (ay_1 + by_2)(qy_1 + ry_2)] \\ & + y_3(ry_1 + ny_2)[(ay_1 + by_2)by_1 - y_3(py_1 + qy_2 + by_3)] = 0. \end{aligned}$$

Ora se la coincidenza voluta avesse luogo, esaminando nella equazione di S i coefficienti di $y_1 y_3^3$, $y_2 y_3^3$ si vede che dovrebbe essere $rb \neq 0$, $nb = 0$: dunque $n = 0$, ma allora da C_4 si stacca $x_1 = 0$.

3. Sempre rimanendo nella ipotesi della irriduttibilità della quartica data, resta a esaminare il caso in cui essa non possegga flessi o ondulazioni distinti da punti singolari. Supponiamo dunque che la quartica possegga un punto almeno doppio. La sua cubica polare ha ivi pure un punto doppio, cioè ha nullo il suo discriminante, ma poichè deve per ipotesi annullarsi anche il suo invariante S, segue che si annulla pure l'invariante T e quindi il punto doppio supposto è cuspide per la cubica polare e per conseguenza è anche tale per la quartica fondamentale.

Prendendo questo punto per $(0\,0\,1)$ e la $x_1 = 0$ per tangente cuspidale, la C_4 sarà rappresentata da una equazione della forma:

$$(1) \quad \begin{cases} C_4 \equiv 6m x_1^2 x_3^2 + x_3(4a x_1^3 + 12 b x_1^2 x_2 + 12 c x_1 x_2^2 + d x_2^3) \\ \qquad + e x_1^4 + 4f x_1^3 x_2 + 6 g x_1^2 x_2^2 + 4 h x_1 x_2^3 + k x_2^4 = 0, \end{cases}$$

e per il covariante S avremo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} S \equiv {} & [(gy_1 + hy_2 + cy_3)my_1 - (by_1 + cy_2)^2]^2 \\ & + (cy_1 + dy_2)^2[(ay_1 + by_2 + my_3)^2 - my_1(ey_1 + fy_2 + ay_3)] \\ & + my_1(cy_1 + dy_2)[(fy_1 + gy_2 + by_3)(by_1 + cy_2) \\ & - (gy_1 + hy_2 + cy_3)(ay_1 + by_2 + my_3)] \\ & + [my_1(hy_1 + ky_2 + dy_3) - 2(by_1 + cy_2)(cy_1 + dy_2)] \times \\ & \times [(ay_1 + by_2 + my_3)(by_1 + cy_2) - my_1(fy_1 + gy_2 + by_3)] = 0. \end{aligned}$$

Se S deve coincidere con C_4, bisogna che sia nullo il coefficiente di $y_2^2 y_3^2$ che è md. Ma per $m = 0$ si vede subito che S è un quadrato perfetto. Dunque sarà $d = 0$. Allora la cubica polare di $(0\,0\,1)$ è:

$$x_1(3m x_1 x_3 + a x_1^2 + 3 b x_1 x_2 + 3 c x_2^2) = 0.$$

Si osservi adesso che la conica

$$3m x_1 x_3 + a x_1^2 + 3 b x_1 x_2 + 3 c x_2^2 = 0$$

non può spezzarsi in una coppia di rette perchè ne seguirebbe $m = 0$, oppure $c = 0$ e nel 1° caso S (come già abbiamo osservato) sarebbe un quadrato perfetto, nel 2° da S si staccherebbe $y_1 = 0$. Dunque potremo prendere il punto $(1\,0\,0)$ su tale conica e la tangente in quel punto per

retta $x_3 = 0$. Ciò non conduce a nessuna restrizione e d'altra parte l'equazione di C_4 si semplifica dovendo essere

$$a = 0, \qquad b = 0$$

e rimane:

$$S \equiv [(gy_1 + by_2 + cy_3)my_1 - c^2y_2^2]^2 + c^2y_1^2[m^2y_3^2 - my_1(ey_1 + fy_2)]$$
$$+ mcy_1^2[(fy_1 + gy_2)cy_2 - my_3(gy_1 + by_2 + cy_3)]$$
$$+ y_1[m(by_1 + ky_2) - 2c^2y_2][cmy_2y_3 - my_1(fy_1 + gy_2)] = 0.$$

Seguitando il confronto con l'equazione di C_4 si trova che debbono esser nulli i coefficienti di $y_1^2y_2y_3$ e di $y_1^3y_3$, il che porta che sia (poichè $m \neq 0$, $c \neq 0$)

$$b = 0, \ g = 0,$$

e quindi S diviene:

$$S \equiv m^2c^2y_1^2y_3^2 + y_1y_2^2y_3(m^2kc - 4mc^3) - ec^2my_1^4$$
$$+ y_1^3y_2(2mfc^2 - m^2kf) + c^4y_2^4 = 0;$$

e proseguendo il confronto:

$$\frac{6}{k} = \frac{m}{c^2}, \qquad \frac{e}{k} = \frac{em}{c^2},$$

dalle quali, se $e \neq 0$, segue $k = 0$: ma allora da C_4 si stacca x_1. Dunque $e = 0$, $k = \frac{6c^2}{m}$. Servendosi adesso dell'ultima condizione:

$$\frac{4f}{k} = \frac{f(2mc^2 - m^2k)}{c^4}$$

e introducendo in essa $k = \frac{6c^2}{m}$, si vede che siamo necessariamente condotti a $f = 0$ e per C_4 rimane:

$$C_4 \equiv 6mx_1^2x_3^2 + 12cx_1x_2^2x_3 + kx_2^4 = 0,$$

la quale si compone di due coniche bitangenti. Dunque per le quartiche irriduttibili il teorema è dimostrato.

4. Passiamo alle quartiche riduttibili e cominciamo da una quartica composta di una retta e di una cubica irriduttibile. Il ragionamento fatto al principio del n° 3 prova che ogni punto d'incontro della retta con la cubica deve costituire per la quartica totale un punto doppio con le tangenti riunite: dunque la retta suddetta incontra la cubica in tre punti riuniti e quindi la equazione della C_4 attuale si dedurrà dalla (1) del n° 3 supponendo:

$$d = k = c = 0;$$

ma allora da S si stacca $y_1^2 = 0$ e quindi la coincidenza cercata è impossibile.

5. Lo stesso ragionamento sopra citato dimostra che non rimangono a discutersi utilmente che i seguenti casi: due coniche bitangenti, una retta doppia e una conica, 4 rette passanti per un punto.

Negli ultimi due casi si riconosce facilmente che la coincidenza voluta è impossibile perchè S o si riduce a una retta quadrupla, o è indeterminato.

Restano le coniche bitangenti. La loro equazione complessiva può scriversi

$$(2) \qquad 6m x_1^2 x_2^2 + 12n x_1 x_2 x_3^2 + p x_3^4 = 0.$$

Se le equazioni separate delle due coniche sono

$$\alpha x_1 x_2 + \beta x_3^2 = 0,$$
$$\alpha' x_1 x_2 + \beta' x_3^2 = 0,$$

i due rapporti $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$ che le individuano sono le radici della equazione di 2° grado:

$$p z^2 - 12 n z + 6m = 0.$$

Calcolando S si trova:

$$S \equiv m^2 n^2 y_1^2 y_2^2 + y_1 y_2 y_3^2 (m^2 np - 4mn^3) + n^4 y_3^4 = 0.$$

Dunque le condizioni di coincidenza sono

$$\frac{6m}{p} = \frac{m^2 n^2}{n^4}, \qquad \frac{12n}{p} = \frac{m^2 np - 4mn^3}{n^4}.$$

Si esclude $p = 0$ perchè dovrebbe anche essere $n = 0$ e quindi S indeterminato: così pure si esclude $m = 0$.

Allora le due condizioni precedenti si riducono all'unica

$$6n^2 = mp,$$

la quale esprime che la (2) ha una radice doppia, che cioè le due coniche coincidono.

Il teorema è dunque dimostrato.

Messina, giugno 1899.

EDGARDO CIANI.

SUR L'EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL DES SÉRIES DE TAYLOR REPRÉSENTANT DES COMBINAISONS RATIONNELLES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Par M. **Michel Petrovitch**, à Belgrade (Serbie).

Adunanza del 13 agosto 1899.

Je me propose ici de chercher la forme générale du coefficient α_n des séries

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots,$$

définissant une combinaison rationnelle d'une fonction exponentielle e^{ax}. On ramène facilement à ce problème celui dans lequel la série représente une combinaison rationnelle de fonctions trigonométriques $\sin ax$ et $\cos ax$.

Soit

$$(1) \qquad y = R(u),$$

avec

$$(2) \qquad u = e^{ax}$$

une telle fonction, où R est une fonction rationnelle en u. On aura alors

$$(3) \qquad \alpha_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=0},$$

et d'après une formule connue sur la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction composée (*voir*, par ex., Bertrand, *Analyse*, t. I, page 140), on aura

$$(4) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = A_{1,n} R'(u) + A_{2,n} R''(u) + \ldots + A_{n,n} R^{(n)}(u),$$

avec

$$(5) \qquad A_{k,n} = \frac{(-1)^{k+1}}{1.2.3\ldots k}\left[\binom{k}{1} u^{k-1}\frac{d^n u}{dx^n} - \binom{k}{2} u^{k-2}\frac{d^n u^2}{dx^n} + \binom{k}{3} u^{k-3}\frac{d^n u^3}{dx^n} - \ldots \pm \frac{d^n u^k}{dx^n}\right].$$

En y posant

$$u = e^{ax},$$

on trouve

(6) $$\frac{d^n u^k}{dx^n} = (ka)^n e^{kax},$$

et par suite

(7) $$A_{k,n} = \frac{(-1)^{k+1} a^n}{1.2.3\ldots k} e^{kax}\left[\binom{k}{1} - \binom{k}{2}2^n + \binom{k}{3}3^n - \ldots\right].$$

Si l'on pose $x = 0$, on trouve donc

(8) $$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=0} = a^n[C_{1,n}R'(1) + C_{2,n}R''(1) + \ldots + C_{n,n}R^{(n)}(1)],$$

avec

(9) $$C_{k,n} = \frac{(-1)^{k+1}}{1.2.3\ldots k}\left[\binom{k}{1} - \binom{k}{2}2^n + \binom{k}{3}3^n - \ldots\right].$$

Pour calculer les valeurs de

$$R'(1,)\quad R''(1),\quad R'''(1),\ \ldots$$

choisissons une valeur particulière de x, telle que, ρ_1 étant le pôle de la fonction rationnelle $R(1+u)$, considérée comme fonction de u, ayant le plus petit module, on ait

(10) $$\text{part. réelle de } (ax) < \log(\text{mod}\,\rho_1).$$

La fonction $R(1+u)$ sera holomorphe à l'intérieur du cercle ayant l'origine comme centre, ρ_1 comme rayon, et contenant le point $u(x)$ dans son intérieur. Par conséquent on aura

$$R(1+u) = R(1) + \frac{R'(1)}{1}u + \frac{R''(1)}{1.2}u^2 + \ldots,$$

ou bien

(11) $$R(1+u) = M_0 + M_1 u + M_2 u^2 + \ldots,$$

avec

(12) $$R^{(k)}(1) = 1.2.3\ldots k M_k.$$

La série (11), représentant une fonction rationnelle en u, est une série récurrente et par suite, d'après un théorème connu, on aura

(13) $$M_n = P_1(n)r_1^n + P_2(n)r_2^n + \ldots + P_\mu(n)r_\mu^n,$$

où: $r_1, r_2, \ldots r_\mu$ désignent les racines de l'équation génératrice

$$G(r) = 0$$

de la fraction rationnelle $R(1+u)$; $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ désignent certains polynômes en n tels que P_k est de degré λ_{k-1}, λ_k étant le degré de multiplicité de la racine r_k. De plus, l'équation algébrique

$$G(r) = 0$$

n'est autre que celle obtenue en égalant à zéro le dénominateur de la

fonction $R(1+u)$, après y avoir remplacé u par $\frac{1}{r}$ et chassé le dénominateur, qui sera une certaine puissance de r.

Le polynôme $P_i(k)$, correspondant à la racine r_i, sera de la forme

$$(14) \qquad P_i(k) = b_{i,0} + b_{i,1}k + \ldots + b_{i,\lambda_i-1}k^{\lambda_i-1} = \sum_{0}^{\lambda_i-1}{}^{p}\, b_{ip}k^p,$$

où les b_{ip} sont des quantités finies et fixes en grandeur et en nombre, indépendantes de l'indice n et que l'on calculera aisément pour tout cas particulier donné.

En remplaçant le polynôme $P_i(k)$ par son expression (14) dans l'équation (13) et (12), on trouve

$$(15) \qquad R^{(k)}(1) = 1.2.3\ldots k\sum_{1}^{\mu}{}^{i}\sum_{0}^{\lambda_i-1}{}^{p}\, b_{ip}k^p r_i^k;$$

et en tenant compte de ce que l'équation (9) peut s'écrire sous la forme

$$(16) \qquad C_{k,n} = \frac{1}{1.2.3\ldots k}\sum_{1}^{k}{}^{j}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}j^n,$$

l'equation (8) devient :

$$(17) \qquad \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 = a^n\sum_{1}^{\mu}{}^{i}\sum_{0}^{q_i}{}^{p}\sum_{1}^{n}{}^{k}\sum_{1}^{k}{}^{j}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}j^n b_{ip}k^p r_i^k.$$

On en deduit le résultat suivant :

Le coefficient α_n du terme général de la série de Taylor

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots,$$

représentant une combinaison rationnelle d'une fonction exponentielle e^{ax} est de la forme

$$(18) \qquad \alpha_n = \frac{a^n}{1.2.3\ldots n}\sum_{1}^{\mu}{}^{i}\sum_{0}^{q_i}{}^{p}\sum_{1}^{n}{}^{k}\sum_{1}^{k}{}^{j}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}j^n b_{ip}k^p r_i^k,$$

où les quantités

$$r_i,\quad b_{ip}\quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \ldots \mu \\ p = 0, 1, 2, \ldots q_i \end{cases}$$

et les entiers positifs μ, q_i sont finis et fixes, indépendants de l'indice n ayant les significations suivantes :

1° les r_i sont les inverses des pôles ρ_i de la fonction $R(1+u)$, considérée comme fonction de u;

2° les b_{ip} sont des constantes ne dépendant que des coefficients de la fonction R et dont nous montrerons le calcul plus loin;

3° μ est le nombre de pôles ρ_i distincts;

4° q_i est égal à l'ordre λ_i, diminué d'une unité, du pôle ρ_i.

Le coefficient α_n *est donc égal à la somme de*

$$\frac{n(n+1)}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\mu)$$

termes de la forme

$$\frac{(-1)^{k+j}\binom{k}{j}(aj)^n b_{ik} k^p r_i^k}{1.2.3\ldots n},$$

où i, j, k, p sont des entiers positifs, et a, b_{ik}, r_i des constantes indépendantes de n, définies précédemment.

Le calcul des constantes b_{ik} peut s'effectuer de diverses manières. On peut le faire par ex. en décomposant la fraction rationnelle $R(1+u)$ en fractions simples et en développant celles-ci en séries ordonnées suivant les puissances de u. La fonction $R(1+u)$ ayant comme pôles ρ_i $(i=1, 2, \ldots, \mu)$ d'ordres respectifs λ_i, peut s'écrire

$$R(1+u)=\sum_1^{\lambda_i}{}_p\frac{B_p}{(u-\rho_1)^p}+\ldots+\sum_1^{\lambda_\mu}{}_p\frac{G_p}{(n-\rho_\mu)^p}.$$

En tenant compte de ce qu'on a identiquement

$$\frac{i(i+1)\ldots(i+n-1)}{1.2.3\ldots n}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)},$$

le coefficient de $\left(\frac{u}{\rho_i}\right)^n$ dans le développement de la fraction

$$\sum_1^{\lambda_i}{}_p\frac{B_i}{(u-\rho_1)^p}$$

sera

$$\frac{-B_1}{\rho_1}+\binom{n+1}{1}\frac{B_2}{\rho_1^2}-\binom{n+1}{2}\frac{B_3}{\rho_1^3}+\ldots\pm\binom{n+1}{\lambda_i-1}\frac{B_{\lambda_i}}{\rho_1^{\lambda_i}}.$$

En l'ordonnant suivant les puissances de n, de sorte que cette expression devient

$$g_0+g_1n+g_2n^2+\ldots+g_{\lambda_i-1}n^{\lambda_i-1},$$

comme l'on a

$$\frac{1}{\rho_1}=r_1,$$

d'après la définition des constantes b_{ip} on aura

$$b_{11}=g_0,\quad b_{12}=g_1,\ \ldots,\ b_{1\lambda_1}=g_{\lambda_1-1}.$$

De la même manière, en développant l'expression

$$\sum_1^{\lambda_2}{}_p\frac{C_i}{(u-\rho_2)^p}$$

en série ordonnée suivant les puissances de n, on calculera les constantes

$$b_{21},\ b_{22},\ \ldots\ b_{2,\lambda_2-1}\quad \text{etc.}$$

On peut aussi calculer directement les polynômes

$$P_i(n) = b_{i0} + b_{i1}n + b_{i2}n^2 + \ldots + b_{i,\lambda_i-1}n^{\lambda_i-1}$$

par la méthode suivante, due à Lagrange (*Œuvres*, t. V, pag. 640).

Soit

$$G(r) = A + Br + Cr^2 + Dr^3 + Er^4 + \ldots \tag{19}$$

le premier membre de l'équation algébrique

$$G(r) = 0,$$

et posons pour abréger

$$\left\{\begin{aligned} Q_0(r) &= B + Cr + Dr^2 + Er^3 + \ldots \\ Q_1(r) &= C + Dr + Er^2 + Fr^3 + \ldots \\ Q_2(r) &= D + Er + Fr^2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Soient

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$$

les coefficients de m premiers termes de la série de Taylor, ordonnée suivant les puissances de u et représentant la fonction $R(1+u)$ (m étant le degré de l'équation génératrice), et faisons

$$[A_0 Q_0(r) + A_1 Q_1(r) + \ldots + A_m Q_m(r)]r^n = F(r). \tag{21}$$

Le polynôme $P_i(n)$, correspondant à la racine r_i, sera égal au terme indépendant de ϖ dans le développement de l'expression

$$\frac{F(r_i) + \varpi\dfrac{dF}{\partial r_i} + \dfrac{\varpi^2}{1.2}\dfrac{d^2F}{\partial r_i^2} + \ldots}{\dfrac{dG}{dr_i} + \dfrac{\varpi}{1.2}\dfrac{d^2G}{dr_i^2} + \dfrac{\varpi^2}{1.2.3}\dfrac{d^3G}{dr_i^3} + \ldots} \tag{22}$$

après avoir développé cette expression en série ordonnée suivant les puissances ascendante de ϖ et après y avoir supprimé les derivées de G qui sont nulles en tenant compte du degré de multiplicité de la racine considérée r_i; enfin, l'expression ainsi obtenue doit être divisée par r_i^n.

Enfin, remarquons qu'une série de la forme (18) étant donnée, la période de la fonction simplement périodique, qu'elle représente, est

$$\frac{2\pi i}{a};$$

les pôles élémentaires γ_i de cette fonction sont donnés par la formule

$$\gamma_i = \frac{1}{a}\log\left(1 + \frac{1}{r_i}\right)$$

et l'ordre du pôle γ_i est égal à l'entier q_i, augmenté d'une unité.

Ceci resulte de ce que, si

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \rho_3, \ldots$$

sont les pôles de $R(1+u)$, on a

$$\frac{1}{r_i} = \rho_i,$$

et par suite, en désignant par

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \ldots,$$

les pôles de $R(u)$ en u, on aura

$$e^{\alpha\gamma_i} = \beta_i = 1 + \rho_i = 1 + \frac{1}{r_i}.$$

Belgrade, 23 juillet 1899.

MICHEL PETROVITCH.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

Par M. **Michel Petrovitch**, à Belgrade (Serbie).

Adunanza del 13 agosto 1899.

Étant donnée une équation différentielle du premier ordre, écrite sous la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = F(x, f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

où F est une fonction algébrique ou transcendante de x et f_i (les f_i étant fonctions données de y) supposons que les conditions suivantes soient remplies :

1° Toutes les fonctions f_i et leurs dérivées premières sont des fonctions réelles, continues et *limitées* de y, restant finies pour toute valeur réelle, finie ou infinie de y. Nous désignerons par M_i et N_i la plus grande et la plus petite valeur de la fonction $f_i(y)$, lorsque y varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2° La fonction F et ses dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial f_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial f_n}$$

sont réelles, finies et continues pour toute valeur de x comprise dans un certain intervalle δ et pour toute valeur des f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, comprise entre M_i et N_i.

Dans ces conditions le module de la fonction F reste inférieur à une certaine quantité positive finie M pour toute valeur de x, comprise dans l'intervalle ρ et pour toute valeur finie ou infinie de y.

D'autre part, la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial y}$ étant représentée par

$$\frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial y},$$

sera également une fonction limitée dans l'intervalle ρ, quelle que soit la valeur de y.

On en conclut, d'après un théorème connu, que l'intégrale qui pour $x = x_0$ prend la valeur donnée à l'avance $y = y_0$ (x_0 et y_0 étant réels et assujettis à la seule condition que x_0 soit compris dans l'intervalle δ) restera finie et continue dans tout intervalle de $x = x_0 - \gamma$ à $x = x_0 + \gamma$, compris lui-même dans l'intervalle δ.

Supposons maintenant remplies les conditions supplémentaires suivantes :

3° La fonction F et ses dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial f_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gardent un signe invariable pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle de $x_0 - \gamma$ à $x_0 + \gamma$, quelle que soient les valeurs des f_i comprises entre M_i et N_i.

4° En désignant par

$$k_1, k_2, \ldots, k_n$$

des constantes quelconques, telles qu'on ait

$$\begin{array}{c} M_1 < k_1 < N_1 \\ M_2 < k_2 < N_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_n < k_n < N_n, \end{array}$$

l'intégrale

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, k_1, \ldots, k_n)\,dx$$

n'a pour chaque valeur de x_1 et x_2, comprise entre $x = x_0 - \gamma$ et $x = x_0 + \gamma$, qu'une seule valeur réelle, également finie et déterminée (tout en pouvant avoir plusieurs valeurs imaginaires).

Ceci étant, soient

$$i = 1, 2, 3, \ldots, h$$

les indices des dérivées $\dfrac{\partial F}{\partial f_i}$ positives et

$$i = h + 1, h + 2, \ldots, n$$

celles des dérivées négatives. Posons

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, M_1, \ldots, M_h; N_{h+1}, \ldots, N_n)\,dx$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, N_1, \ldots, N_h; M_{h+1}, \ldots, M_n)\,dx.$$

On peut montrer que :

L'intégrale y de (1), *qui pour $x = x_0$ prend la valeur $y = y_0$, tout en restant finie et continue pour toute valeur de x comprise entre $x_0 - \gamma$ et $x_0 + \gamma$, y varie constamment dans un même sens et est comprise entre les deux fonctions $\lambda(x, x_0, y_0)$ et $\mu(x, x_0, y_0)$.*

En effet, d'après ce qui a été dit sur F, f_i et y, la fonction

$$F(x, f_1, \dots, f_n),$$

après y avoir remplacé y par sa valeur en x, tirée de l'expression de l'intégrale, sera elle-même une fonction finie et continue pour

$$x_0 - \gamma < x < x_0 + \gamma,$$

et gardera un signe invariable.

De plus, les derivées

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, b)$$

étant positives, si l'on pose pour abréger

$$F(x, M_1, \dots, M_b; f_{b+1}, \dots, f_n) = \Delta_1,$$
$$F(x, N_1, \dots, N_b; f_{b+1}, \dots, f_n) = \Delta_2,$$

on aura

$$\Delta_1 < F(x, f_1, f_2, \dots, f_n) < \Delta_2.$$

D'autre part, les dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} \qquad (i = b + 1, \dots, n)$$

étant négatives, si l'on pose

$$F(x, M_1, \dots, M_b; N_{b+1}, \dots, N_n) = \Omega_1,$$
$$F(x, N_1, \dots, N_b; M_{b+1}, \dots, M_n) = \Omega_2,$$

on aura

$$\Delta_1 > \Omega_1, \qquad \Delta_2 < \Omega_2$$

et par suite

$$\Omega_1 < F(x, f_1, \dots, f_n) < \Omega_2.$$

On en conclut que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} F(x, f_1, \dots, f_n)\, dx,$$

après y avoir remplacé y par sa valeur en x, sera comprise entre les valeurs correspondantes de deux intégrales

$$J_1(x) = \int_{x_0}^{x} \Omega_1\, dx$$
$$J_2(x) = \int_{x_0}^{x} \Omega_2\, dx,$$

lesquelles, en vertu de la 4ème hypothèse, ont pour toute valeur de x, com-

prise entre $x_0 - \gamma$ et $x_0 + \gamma$, une seule valeur réelle, qui est finie et déterminée. Et comme l'on a identiquement

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, f_1, \ldots, f_n)\, dx,$$

la fonction F gardant un signe invariable entre les limites d'intégration, la proposition est démontrée.

Il peut arriver que l'intervalle δ s'étend à toutes les valeurs finies de x. *La proposition précédente s'applique alors quelles que soient les valeurs initiales x_0 et y_0 et s'étend à toutes les valeurs réelles de x.*

Remarquons que, dans ce dernier cas, la valeur asymptotique de l'intégrale considérée pour $x = +\infty$ ou pour $x = -\infty$ sera finie ou infinie, suivant que J_1 et J_2 tendent vers des limites finies ou infinies pour $x = \pm\infty$. Quand elle est finie, elle est comprise entre

$$y_0 + \lim J_1(x)$$

et

$$y_0 + \lim J_2(x).$$

Par exemple, l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x^2 + \beta e^{-ky^2}$$

(où α et β sont des constantes positives), prenant pour $x = x_0$ la valeur $y = y_0$, est constamment (pour toutes les valeurs réelles de x) comprise entre les fonctions

$$y_0 + \frac{\alpha}{3}(x^3 - x_0^3) + \beta(x - x_0)$$

et

$$y_0 + \frac{\alpha}{3}(x^3 - x_0^3),$$

et ses valeurs asymptotiques sont infinies.

Pour l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-rx^2}}{1 - \alpha e^{-kx^2} - \beta e^{-kx^2 - py^2}}$$

(où α, β, k, p, r sont des constantes positives avec $\alpha + \beta < 1$) l'intégrale y est comprise entre les fonctions

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - \alpha e^{-kx^2}}\, dx,$$

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - (\alpha + \beta) e^{-kx^2}}\, dx.$$

Ses valeurs asymptotiques sont finies et déterminées : en désignant par

a la valeur de y pour $x=0$, sa valeur asymptotique pour $x=\infty$ sera comprise entre

$$a+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha)$$

et

$$a+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha+\beta),$$

où $\theta(z)$ désigne la transcendante

$$\theta(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{z^n}{\sqrt{r+kn}};$$

de même, la valeur asymptotique pour $x=-\infty$ sera comprise entre

$$a-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha)$$

et

$$a-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha+\beta).$$

Ceci résulte de ce qu'on a

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-rx^2}}{1-ze^{-kx^2}}dx=\sum_{n=0}^{n=\infty}u_n z^n,$$

avec

$$u_n=\int_0^{\infty}e^{-(r+kn)x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{r+kn}}.$$

Enfin, on peut intervertir le rôle de x et y et appliquer le raisonnement précédent à l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\Phi(y, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions de x, en modifiant convenablement les conditions supposées précédemment.

Belgrade, 23 juillet 1899.

MICHEL PETROVITCH.

LE SUPERFICIE IRRAZIONALI DI 4° ORDINE DI GENERE GEOMETRICO-SUPERFICIALE NULLO.

Nota di **Michele de Franchis**, in Palermo.

Adunanza del 25 agosto 1899.

Fra le superficie di 4° ordine di genere geometrico-superficiale $p_g = 0$, quelle razionali ($p_n = P = 0$) *) sono già state determinate dal signor Noether **). La loro ricerca coincide, in fondo, con quella dei tipi dei sistemi lineari semplici di curve piane di grado 4 (il cui genere è perciò $\leqq 3$). Però si conoscevano già superficie di 4° ordine di genere $p_g = 0$ non razionali: esse sono i coni con meno di 3 generatrici doppie, le rigate ellittiche ***) ed una superficie trovata dal signor Kummer ****), dotata di due tacnodi e possedente un fascio ellittico di coniche.

In questa Nota io pervengo alla determinazione di tutte le superficie irrazionali di 4° ordine di genere $p_g = 0$. Trovo anzitutto che esse o sono coni o sono rappresentabili sul cono cubico. Queste ultime sono le 2 rigate ellittiche, la superficie testè ricordata, scoperta dal Kummer, un'altra superficie con un sol tacnodo, non ordinario, dotata pure d'un fascio ellittico di coniche la quale può intendersi come caso limite di quella, ma della quale

*) Con p_n e P denotiamo il genere aritmetico-superficiale ed il bigenere. La condizione di razionalità $p_n = P = 0$, fu data dal signor Castelnuovo nella Memoria: *Sulle superficie di genere zero* (Mem. della Società Ital. delle Scienze, t. X_3, 1896).

**) Noether: *Ueber rationalen Flächen vierter Ordnung* (Math. Annalen, Bd. 33).

***) Cremona: *Sulle superficie gobbe di 4° grado* (Mem. Acc. di Bologna, t. $VIII_2$, 1868).

****) Kummer: *Ueber die Flächen vierten Grades auf welche Schaaren von Kegelschnitten liegen* (Journ. für Math., Bd. 66, 1864): vedasi anche Noether: *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen* (Math. Annalen, Bd. 3).

non trovasi alcun accenno speciale nella Memoria del Kummer (tendente a trovare le snperficie di 4° ordine con infinite coniche), benchè la sua equazione rientri in una data ivi dal Kummer; e finalmente trovo ancora due superficie dotate d'un fascio ellittico di cubiche gobbe, le quali, a quanto mi risulta, non erano note. Io assegno in questa nota la natura dei punti singolari che determinano tali superficie, servendomi del concetto di singolarità esposto dal signor Segre in una sua recente Memoria *); oltre a ciò, trovo quali e quanti punti multipli possano ancora eventualmente esser contenuti dalle suddette superficie, delle quali do anche le equazioni. Un cenno dei principali risultati stabiliti in questa parte trovasi nei tre quadri che stanno in fine del § 1.

Un'osservazione è qui da fare. Stabilita la proprietà che le superficie di 4° ordine, irrazionali, di genere $p_g = 0$, o sono coni o sono rappresentabili sul cono cubico, si può pensare a determinarle, osservando che le loro equazioni debbono possedere differenziali totali di 1ª specie. Ora esiste un enunciato del signor Poincaré ed un cenno di dimostrazione di esso del signor Picard tendenti alla determinazione di tali equazioni. Però i risultati dei signori Poincaré e Picard sono incompleti **).

Nel § 2 mi occupo della rappresentazione delle predette superficie (e dei coni ellittici) sul cono cubico. Essa vien fatta mediante trasformazioni Cremoniane le quali, tra tutte le possibili, sono del minimo ordine.

Come conseguenza di tale rappresentazione, trovo i tipi dei sistemi lineari semplici di curve di grado 4, giacenti sul cono cubico.

Termino ringraziando il Prof. Gerbaldi dell'Università di Palermo che mi richiamò in mente la questione di cui mi occupo qui ed il Profes-

---

*) Segre: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (Ann. di Matem., t. XXV_2, 1896); supporrò in seguito nel lettore la conoscenza di quest'importante Memoria. Vedasi anche Del Pezzo: *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. VI, 1892) e Levi: *Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche* (Ann. di Matem., t. $XXVI_2$, 1897): molti altri lavori sarebbero qui da citare; ma non me ne trattengo perchè a noi interesserà nel seguito soltanto il concetto di punto singolare inteso come prodotto della condensazione di ben determinati elementi singolari.

**) Vedasi la nota in fondo al n° 8 del presente lavoro.

rore Castelnuovo dell'Università di Roma che mi consigliò delle opportune modificazioni intorno alla maniera d'ordinare i risultati.

§ 1.

1. Una superficie irriducibile di 4° ordine, F_4, affinchè riesca di genere geometrico $p_g = 0$, è necessario che possieda dei punti multipli. La massima moltiplicità d'un punto O, multiplo per F_4, è 4. Nel caso in cui F_4 possieda un punto O quadruplo, essa è un cono ($p_g = 0, P = 0$, e $p_n = 0, -1, -2, -3$ secondo che la sezione generica è dei generi 0, 1, 2, 3).

Se F_4 possiede un punto triplo, è razionale.

Resta a considerare il caso in cui F_4 non possiede che punti doppi. Sia O uno di essi. La sezione generica fatta con piani per O è necessariamente irreducibile (non potendo F_4 essere un cono di vertice O); denotiamone con π il genere ($\pi \leqq 2$). Se $\pi = 0$ ovvero $= 1$, la F_4 è razionale od è rappresentabile su un cono cubico *); sia invece $\pi = 2$. Proiettisi allora da O la F_4 sopra un piano: verremo così a rappresentarla su un piano doppio φ.

La curva di diramazione di φ è una curva di 6° ordine.

Ora un piano doppio con una curva di diramazione C_6, di 6° ordine, è del genere geometrico $p_g = 1$, se la C_6 non possiede punti multipli di grado > 2; ed un punto 3-plo di C_6, abbassante p_g, risulta necessariamente di una coppia, almeno, di punti 3-pli tra loro infinitamente vicini **).

Inoltre bisogna osservare che tutte le componenti di C_6, curva di diramazione del piano doppio φ, devono esser *semplici*. Se C_6 ha un punto P, 6-plo, essa si comporrà di 6 rette distinte passanti per P, ed il piano doppio φ sarà quindi rappresentabile su un cono di genere 2, e su questo potrà quindi rappresentarsi univocamente anche F_4. Se la C_6 ha invece un punto 5-plo o 4-plo P, ogni retta di φ passante per P rappresenta doppiamente una curva razionale su F_4, variabile in un fascio lineare, e quindi F_4 è razionale ***).

---

*) Castelnuovo: *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, t. III_5, 1894).

**) Enriques: *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (Rend. della R. Acc. dei Lincei, t. VII_5, 1898).

***) Noether: *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* (Math. Annalen, Bd. 3).

Finalmente supponiamo (unico caso che resta a considerarsi) che C_6 possieda una o più coppie di punti 3-pli infinitamente vicini (le quali coppie possono, alla loro volta, essere fra loro infinitamente vicine). Dico esser 2 il massimo numero di tali coppie. Difatti se il numero s di tali coppie fosse $\geqq 3$, potremmo su C_6 certamente considerare 5 punti 3-pli. Per essi passerebbe certamente una conica semplice o composta, e si vede subito che la C_6 conterrebbe tal conica od una sua parte contata 3 volte, mentre invece ogni componente di C_6 deve esser contata una sola volta. Ora, se C_6 ammette una sola coppia di punti 3-pli infinitamente vicini, il piano doppio φ è, come è noto, razionale *). Se C_6 ammette due coppie di punti 3-pli infinitamente vicini, essa consta evidentemente di 3 coniche toccantisi in due punti distinti A, B, ovvero di tre coniche toccantisi in un punto A secondo un contatto quadripunto. Ma il piano doppio φ può allora ridursi con una conveniente trasformazione quadratica ad avere per curva di diramazione il luogo composto di quattro rette appartenenti ad uno stesso fascio e quindi è riferibile al cono cubico, sul quale perciò possiamo rappresentare F_4.

Segue che:

le superficie di 4° ordine di genere geometrico superficiale (Flächengeschlecht) $p_g = 0$ *sono rappresentabili o sul piano o su coni dei generi* 1, 2, 3.

Osserviamo adesso che le superficie di 4° ordine rappresentabili su coni di genere 3 risultano, dalla precedente discussione, coni. Lo stesso si può dire di quelle rappresentabili su coni di genere 2. Difatti denotiamo con F_4 una cotale superficie di 4° ordine, con μ l'ordine delle curve razionali γ corrispondenti alle generatrici del cono. Dico essere $\mu = 1$. Difatti il fascio irrazionale (di genere 2) di curve γ determina su una sezione piana generica di F_4 una involuzione di gruppi di punti, di grado μ e genere 2. Le sezioni di F_4 hanno quindi il genere 2 o 3. Se hanno il genere 2, si ricava subito (dalla nota formola di Zeuthen) che $\mu = 1$; se poi potesse la sezione generica esser di genere 3, si ricaverebbe $\mu = 2$. Sarebbero in tal caso le γ coniche, le quali (per la formola anzidetta) non dovrebbero toccare nessuna sezione di genere 3. Ora ciò è, manifestamente, assurdo, come vedesi facilmente. È quindi $\mu = 1$, ossia la F_4 è una rigata di genere 2 e perciò un cono **).

---

*) Noether: *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (Sitzungsberichte der phys. med. Soc. zu Erlangen, 1878).

**) Cremona: *Sulle superficie gobbe di 4° grado*, loc. cit.

Il risultato precedente si può quindi enunciare così:

Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere $p_g = 0$ sono coni, ovvero sono rappresentabili sul cono cubico.

2. Passiamo quindi a ricercare le superficie F_4, di 4° ordine, rappresentabili sul cono cubico. Anzitutto, se esse hanno curve multiple, esse sono doppie ed il loro ordine dev'essere ≤ 2. Una curva doppia d'una tal superficie non può essere una conica, altrimenti, dovendo essere il genere aritmetico $p_a = -1$, dovrebbe esistere (su di essa o fuori) un punto multiplo *proprio*, cioè abbassante il genere delle sezioni piane passanti ivi *).

Ma allora tali sezioni (non potendo essere riducibili) sarebbero razionali, e la superficie sarebbe razionale. Se poi esistono delle rette doppie di F_4, i piani passanti ivi secano F_4 secondo coniche o coppie di rette. Ma nel 1° caso sarebbe F_4 razionale, contro l'ipotesi, nel 2° una rigata ellittica (od un cono ellittico). Lasciamo da canto il caso ovvio dei coni ed osserviamo che le rigate ellittiche di 4° ordine son note e sono quelle F_4 che hanno due rette sghembe doppie (e due sole), rigate che denoteremo con $F_4^{(1,1)}$ e quelle che hanno una retta luogo di tacnodi, le quali verranno denotate con $F_4^{(1,2)}$ **).

3. Passiamo ora a discutere il caso delle superficie senza curve multiple e non coni. Sappiamo già che esse devono possedere punti doppi. Sia O uno di essi. Per proiezione da O, la F_4 viene a rappresentarsi su un piano doppio φ con una certa curva di diramazione.

Se le sezioni, fatte su F_4 con piani per O, sono ellittiche, tal curva di diramazione dev'esser di 4° ordine e quindi è chiaro che essa si comporrà necessariamente di 4 rette passanti per uno stesso punto; se poi le sezioni fatte su F_4 con piani per O fossero curve di genere 2, s'è già visto (n° 1) che la curva di diramazione si comporrebbe di 3 coniche toccantisi in due punti A, B, ovvero di 3 coniche toccantisi in un punto A con contatto quadripunto.

Nel 1° caso, in cui la curva di diramazione del piano doppio si compone di 4 rette passanti per un punto P, ad ogni retta del piano doppio,

*) Enriques: *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie della Società Ital. delle Scienze, t. X_3, 1896).

**) Cremona: *Sulle superficie gobbe di 4° ordine*, loc. cit.

passante per P, corrispondono evidentemente su F_4 due curve razionali poste su uno stesso piano ed appartenenti ad uno stesso fascio ellittico.

I piani su cui trovansi tali coppie di curve razionali fanno fascio attorno ad OP: quattro di essi toccano la F_4 lungo tutta una curva del fascio ellittico e precisamente quelli che proiettano da O le 4 rette componenti la curva di diramazione del piano doppio.

Le curve razionali γ ottenute secando F_4 con piani per OP (su ognuno dei quali sta una coppia di curve γ) sono dello stesso ordine, il quale è evidentemente 2. Quando si rappresenti F_4 sul cono cubico, ad esse vengono a corrispondere le generatrici di tal cono.

Dico che gli altri due punti (diversi da O) in cui OP seca F_4, coincidono in un punto doppio per la F_4 (il quale può però essere infinitamente vicino ad O). Difatti ogni coppia di coniche, sezione di F_4 con un piano per OP deve avere in comune con OP tutti i punti in cui OP seca F_4. Ora le coniche d'una coppia passano entrambe per O e, siccome appartengono ad una stessa serie continua, non possono incontrare OP, oltre che in O, una in un punto, l'altra in un altro punto fisso. Denotiamo quindi con M l'altro punto doppio di F_4 che sta su OP, e supponiamo dapprima che M sia a distanza finita da O. Considerando un piano per OP, le due coniche secate da esso su F_4 si toccano necessariamente in O ed in M, perchè, se avessero in uno di tali punti le tangenti distinte, si potrebbe riferire ogni conica biunivocamente alla sua tangente in quel punto, e siccome il cono tangente ivi alla superficie sarebbe irriducibile (per la continuità della serie di coniche) e di 2° ordine (e quindi razionale), le coniche γ, invece che un fascio ellittico, formerebbero un fascio razionale. Nei punti O ed M la F_4 è quindi dotata di due tacnodi. Tal superficie verrà da noi denotata con $F_4^{(2,1)}$, perchè le curve γ corrispondenti alle generatrici del cono cubico sono coniche, e per distinguerle da una superficie analoga, che troveremo in seguito, che denoteremo con $F_4^{(2,2)}$.

Viceversa, data una superficie $F_4^{(2,1)}$ dotata di due tacnodi O, M, assumendo nello spazio un sistema di coordinate proiettive x, y, z, t, ponendo i punti O ed M nei punti $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ ed i piani tangenti in O ed M nelle facce $y = 0$, $x = 0$, l'equazione di $F_4^{(2,1)}$ assumerà la forma:

$$(1) \qquad x^2y^2 + 2xyf_2(z, t) + f_4(z, t) = 0,$$

ove $f_2(z, t)$, $f_4(z, t)$ sono forme di 2° e 4° grado in z, t. In tale superficie, le sezioni fatte coi piani $z = kt$ si decompongono in due coni-

che bitangenti nei punti O, M. Tale $F_4^{(2,1)}$ è riferibile chiaramente ad un piano doppio la cui curva di diramazione ha l'equazione

$$f_2^2(z, t) - f_4(z, t) = 0,$$

la quale rappresenta 4 rette concorrenti in un punto. La predetta superficie è quindi rappresentabile sul cono cubico, finchè l'equazione $f_2^2 - f_4 = 0$ non ammetta radici multiple. Ma quando ciò accadesse, essa sarebbe razionale.

Abbiamo qui discusso il caso in cui sulla superficie F_4, rappresentabile su un cono cubico, alle generatrici del cono corrispondono coniche passanti per due punti fissi *distinti* O ed M (i quali sono entrambi tacnodi per F_4). Vediamo ora se non esistono superficie F_4 rappresentabili sul cono cubico, sulle quali alle generatrici del cono corrispondano coniche passanti per *un sol* punto O. Proiettando da O la F_4 sopra un piano doppio φ, su questo la curva di diramazione si compone, per ipotesi, di 4 rette concorrenti in un punto P. Le coniche γ che stanno su F_4 si trovano tutte in piani per OP. La retta OP non seca F_4 oltre che in O, essa è tangente *quadripunta* in O.

Un piano per OP seca F_4 secondo due coniche tangenti in O ad OP. Il punto O è un tacnodo, perchè le sezioni per esso devono essere di genere 1. Le 2 coniche γ secate su F_4 da un piano generico per OP non possono avere in comune alcun punto variabile, perchè allora tal puuto genererebbe una curva doppia di F_4, il che è già escluso.

Quindi *le 2 coniche γ secate da uno stesso piano per OP, si toccano in O secondo un contatto quadripunto.*

Una superficie che adempia a tali condizioni verrà denotata con $F_4^{(2,2)}$. Ma è anzitutto necessario mostrarne l'esistenza.

Perciò assumiamo nello spazio un sistema di coordinate proiettive x, y, z, t e poniamo il punto O nel punto $(1, 0, 0, 0)$, il piano tangente ivi nel piano $t = 0$. L'equazione di $F_4^{(2,2)}$ assumerà la forma:

$$x^2 t^2 + 2xt f_2(y, z, t) + f_4(y, z, t) = 0,$$

ove $f_2(y, z, t)$, $f_4(y, z, t)$ sono certe forme di 2° e 4° grado in y, z, t.

Poichè il cono circoscritto da O ad $F_4^{(2,2)}$ si deve decomporre in 4 piani distinti di un fascio, che possiamo supporre abbia per asse la retta $z{=}t{=}0$, quindi si deve avere:

$$f_2^2(y, z, t) - f_4(y, z, t) = \psi_4(z, t),$$

ove $\psi_4(z, t)$ è una forma (di 4° grado) in z, t, tale che l'equazione $\psi_4(z, t) = 0$ non abbia radici multiple.

Con ciò, l'equazione di $F_4^{(2,2)}$ diviene:

(2) $$x^2t^2 + 2xtf_2(y, z, t) + [f_2^2(y, z, t) - \psi_4(z, t)] = 0.$$

Questa, fintanto che l'equazione $\psi_4(z, t) = 0$ sia priva di radici multiple e fintanto che il coefficiente di y^2 in $f_2(y, z, t)$ sia diverso da zero, rappresenta una $F_4^{(2,2)}$. Nel caso in cui la y entrasse al 1° grado in $f_2(y, z, t)$, sarebbe una rigata (dotata nella retta $z = t = 0$ d'un luogo di tacnodi).

Prima di chiudere questo n°, vogliamo conoscere qual sia la singolarità che la superficie $F_4^{(2,2)}$ ha nel punto O. Perciò, seguendo i concetti esposti dal signor Segre *), applichiamo alla superficie $F_4^{(2,2)}$ una trasformazione quadratica generica che abbia come punto fondamentale il punto O. Al tacnodo O di $F_4^{(2,2)}$ verrà a corrispondere una retta o' doppia della superficie trasformata. In particolare, alla direzione OP, asse del fascio di piani secanti $F_4^{(2,2)}$ secondo coppie di coniche, corrisponderà una certa retta p' non appartenente alla superficie trasformata, e che s'appoggia alla retta o' in un punto Q'. Tale retta p' non può esser tangente in Q' alla superficie trasformata, perchè altrimenti (dovendo contenere ancora un punto quadruplo di questa superficie, che è di 6° ordine) vi giacerebbe per intero. Ora i piani che passano per la retta p', secano la superficie secondo coppie di cubiche che hanno un punto doppio comune (nel punto quadruplo della superficie) e che si toccano in Q' secondo un contatto tripunto (perchè tali cubiche sono le trasformate delle coniche giacenti su $F_4^{(2,2)}$).

Segue che la superficie trasformata ha in Q' un oscnodo. Laonde:

Il punto singolare O di $F_4^{(2,2)}$ è un punto doppio cui sia infinitamente vicina una retta doppia infinitesima, la quale contenga un oscnodo (nella direzione OP).

Nel caso speciale in cui la $\psi_4(z, t)$ dell'equazione (2) sia divisibile per t, tal singolarità si specializza: tutte le sezioni per O posseggono ivi un regresso di 2ª specie.

La singolarità della $F_4^{(2,2)}$ viene in tal caso (ed in esso soltanto) ad essere un punto doppio a cui è infinitamente vicina una retta doppia infinitesima sulla quale stanno un oscnodo (nella direzione OP) ed, in generale, due tacnodi.

Questo vedesi trasformando l'equazione (2) con una trasformazione

---

*) Segre: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, loc. cit.

quadratica avente in O un punto fondamentale e la cui conica fondamentale non incontri OP (è meglio che sia una coppia di rette, per semplicità di calcolo). Le direzioni dei due tacnodi sono quelle ottenute segando il piano $t = 0$ coi piani $f_2(y, z, 0) = 0$. In particolare i due tacnodi possono condensarsi, quando la $f_2(y, z, 0)$ sia un quadrato. Una tal superficie verrà sempre considerata come una specializzazione della $F_4^{(2,2)}$ e continueremo a chiamarla con questo nome; *qualora poi la vogliamo distinguere, la chiameremo* $F_4^{(2,2,1)}$.

4. Finora abbiamo supposto che le sezioni fatte sulla F_4, rappresentabile sul cono cubico, con piani passanti pel punto doppio O, fossero di genere 1. Resta a supporre che esse siano invece di genere 2. Dovendo essere il genere p_g di F_4 nullo, due casi possono darsi:

1° o il punto doppio O non abbassa p_g; ed allora necessariamente la F_4 è dotata di altri punti doppi abbassanti p_g;

2° od il punto O produce abbassamento su p_g.

Fermiamoci a discutere il 2° caso, il solo che abbia importanza, perchè nel primo, invece che esaminare il punto O, considereremo un altro punto doppio abbassante p_g.

Il punto O è quindi un punto uniplanare. Proiettando da O la F_4 sopra un piano, veniamo a rappresentarla sopra un piano doppio la cui curva di diramazione dev'essere (n° 1) una curva C_6 decomposta in tre coniche toccantisi in due punti dati A, B, ovvero toccantisi in un solo punto A, secondo un contatto quadripunto.

Poniamoci, pel momento, nel 1° caso.

Osserviamo che il piano tangente in O alla F_4 deve secarla secondo una curva razionale o secondo un insieme di curve necessariamente razionali. Osservando (mercè la rappresentazione sul piano doppio) che le sole sezioni razionali fatti con piani per O possono essere quelle ottenute col piano AOB ovvero coi piani che da O proiettano le tangenti alla curva di diramazione C_6 nei punti A e B, si ricava che il piano tangente in O ad F_4 può essere soltanto uno di questi 3 piani. Dico che esso non può essere AOB. Difatti scegliamo nello spazio un sistema di coordinate proiettive x_1, x_2, x_3, x_4, assumendo il punto $(0, 0, 0, 1)$ nel punto O ed il piano $x_3 = 0$ nel piano AOB. Osservando che il cono circoscritto da O alla F_4 deve scindersi in 3 coni di 2° ordine toccantisi lungo le due generatrici OA, OB, assumiamo i due piani tangenti a questi tre coni lungo OA, OB, rispettivamente come piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. L'e-

quazione della superficie F_4 deve anzitutto assumere, se il piano $x_3=0$ è tangente in O ad F_4, la forma

$$x_4^2 x_3^2 + 2x_4\varphi_3(x_1x_2x_3) + \varphi_4(x_1x_2x_3) = 0,$$

essendo $\varphi_3(x_1x_2x_3)$ e $\varphi_4(x_1x_2x_3)$ forme ternarie di 3° e 4° ordine in x_1, x_2, x_3. Porremo dunque:

$$\varphi_3 \equiv \alpha x_3^3 + x_3^2 A_1 + x_3 A_2 + A_3,$$

essendo α una costante ed A_1, A_2, A_3 tre forme binarie in x_1, x_2 degli ordini 1, 2, 3. Analogamente porremo:

$$\varphi_4 \equiv \beta x_3^4 + x_3^3 B_1 + x_3^2 B_2 + x_3 B_3 + B_4,$$

essendo β una costante e B_1, B_2, B_3, B_4 forme binarie in x_1, x_2, dei gradi 1, 2, 3, 4. L'equazione del cono circoscritto da O ad F_4 sarebbe:

$$\Phi \equiv \varphi_3^2 - x_3^2\varphi_4 = 0,$$

mentre, d'altro canto, esso dovrebbe comporsi di tre coni di 2° ordine tangenti lungo OA ed OB ai piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Quindi dovrebbe essere

$$\Phi \equiv (ax_1x_2 + \mu_1 x_3^2)(ax_1x_2 + \mu_2 x_3^2)(ax_1x_2 + \mu_3 x_3^2),$$

essendo le μ_1, μ_2, μ_3, a costanti ed $a \neq 0$. Uguagliando nelle due espressioni di Φ i termini privi del fattore x_3, sorgerebbe:

$$A_3^2 \equiv a^3 x_1^3 x_2^3,$$

il che è assurdo.

Resta quindi a supporre che il piano tangente in O ad F_4 sia uno dei piani tangenti lungo OA e lungo OB ai tre coni in cui si decompone il cono Φ circoscritto da O ad F_4. Continuando a tenere lo stesso sistema di coordinate proiettive, e supponendo quindi che il piano tangente in O ad F_4 sia uno dei piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ad esempio, quest'ultimo, l'equazione di F_4 dev'essere della forma:

$$x_4^2 x_2^2 + 2x_4\varphi_3(x_1x_2x_3) + \varphi_4(x_1x_2x_3) = 0,$$

ove poniamo:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varphi_3(x_1x_2x_3) &\equiv \alpha x_2^3 + x_2^2 A_1 + x_2 A_2 + A_3, \\ \varphi_4(x_1x_2x_3) &\equiv \beta x_2^4 + x_2^3 B_1 + x_2^2 B_2 + x_2 B_3 + B_4, \end{aligned}$$

ove α e β sono costanti e le A_i, B_i sono forme binarie in x_1, x_3, dei gradi indicati dagl'indici.

Il cono circoscritto da O ad F_4 è:

$$\Phi \equiv \varphi_3^2 - x_2^2\varphi_4 = 0,$$

d'altro canto, dev'essere:

$$\Phi \equiv \prod_{i=1}^{3} (ax_1x_3 + \mu_i x_3^2),$$

eguagliando quindi i coefficienti delle varie potenze di x_2 nelle due espressioni di Φ, si hanno le relazioni:

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta = 0 \\ 2\alpha A_1 - B_1 \equiv 0 \\ A_1^2 + 2\alpha A_2 - B_2 \equiv 0 \\ 2\alpha A_3 + 2A_2 A_1 - B_3 \equiv a^3 x_1^3 \\ A_2^2 + 2A_1 A_3 - B_4 \equiv a^2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) x_1^2 x_3^2 \\ 2A_2 A_3 \equiv a(\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2) x_1 x_3^4 \\ A_3^2 \equiv \mu_1\mu_2\mu_3 x_3^6. \end{cases}$$

A queste si soddisfa scegliendo ad arbitrio la costante α ed il binomio $A_1 \equiv f x_1 + g x_3$, e ponendo:

$$(5) \quad \begin{cases} A_3 \equiv x_3^3 \sqrt{\mu_1\mu_2\mu_3} \\ A_2 \equiv \dfrac{a}{2} \dfrac{\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2}{\sqrt{\mu_1\mu_2\mu_3}} \\ B_4 \equiv A_2^2 + 2A_1 A_3 - a^2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) x_1^2 x_3^2 \\ B_3 \equiv 2\alpha A_3 + 2A_1 A_2 - a^3 x_1^3 \\ B_2 \equiv A_1^2 + 2\alpha A_2 \\ B_1 \equiv 2\alpha A_1 \\ \beta = \alpha^2. \end{cases}$$

La retta OB ($x_2 = x_3 = 0$) appartiene alla F_4, anzi il piano tangente in O ($x_2 = 0$) seca la F_4 secondo la retta OB contata 2 volte ed una conica residua. La retta OA ($x_1 = x_3 = 0$) non appartiene invece ad F_4, essa la seca ulteriormente nel punto P di coordinate (0, 1, 0, $-\alpha$), il quale è doppio per F_4. Siccome la scelta del piano $x_4 = 0$ è stata arbitraria, assoggettiamo per ora questo piano a passare per tal punto. Allora bisogna porre $\alpha = 0$, e quindi per le relazioni (5), $\beta = 0$, $B_1 \equiv 0$. Il cono tangente in P ad F_4 ha allora l'equazione:

$$x_4^2 + 2x_4 A_1 + B_2 = 0,$$

ossia, per le (5),

$$(x_4 + A_1)^2 = 0.$$

Il punto P è quindi uniplanare, e possiamo imporre al piano $x_4 = 0$ di esser tangente ivi alla F_4 (perchè non lo è certamente il piano $x_1 = 0$, nè $x_3 = 0$).

Con ciò, si viene ad avere:

$$A_1 \equiv 0$$

e quindi, per le (5),

$$B_2 \equiv 0.$$

Scelto così il tetraedro coordinato, l'equazione di F_4 diviene quindi:

(6) $$x_4^2x_2^2+\frac{aq}{\sqrt{r}}x_1x_2x_3x_4+x_3^3x_4\sqrt{r}-a^3x_1^3x_2+a^2\left[\frac{q^2}{4r}-p\right]x_1^2x_3^2=0,$$

ove si ponga

$$p=\mu_1+\mu_2+\mu_3;\; q=\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1+\mu_1\mu_2;\; r=\mu_1\mu_2\mu_3.$$

Con ciò, μ_1, μ_2, μ_3 sono le radici dell'equazione

$$\mu^3-p\mu^2+q\mu-r=0.$$

L'equazione (6) si può scrivere:

(7) $$x_4^2x_2^2+m\,x_1x_2x_3x_4+u\,x_3^3x_4+v\,x_1^3x_2+n\,x_1^2x_3^2=0,$$

con m, n, u, v costanti arbitrarie. Si ha:

$$a=-\sqrt[3]{v}$$
$$r=n^2$$
$$q=-\frac{n\,m}{\sqrt[3]{v}}$$
$$p=\frac{m^2-4n}{4\sqrt[3]{v^2}}.$$

Il cono circoscritto ad F_4 dal punto $(0, 0, 0, 1)$ si decompone, come s'è visto, nei tre coni:

$$a\,x_1x_2+\mu_i x_3^2=0 \qquad (i=1, 2, 3),$$

essendo μ_1, μ_2, μ_3 le radici dell'equazione:

(8) $$\mu^3-\frac{m^2-4n}{4\sqrt[3]{v^2}}\mu^2-\frac{n\,m}{\sqrt[3]{v}}\mu-n^2=0.$$

L'equazione (7) resta invariata di forma quando si scambiano x_1, x_3 ed x_2, x_4; il che mostra che la singolarità di F_4 nel punto $(0, 1, 0, 0)$ è simile a quella che F_4 ha nel punto $(0, 0, 0, 1)$. Il cono circoscritto ad F_4 dal punto $(0, 1, 0, 0)$ si decompone nei tre coni:

$$b\,x_3x_4+\lambda_i x_1^2=0 \qquad (i=1, 2, 3),$$

che toccano i piani $x_3=0$, $x_4=0$ rispettivamente lungo le rette $x_1=x_3=0$, $x_1=x_4=0$; ove le $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono le radici dell'equazione:

(9) $$\lambda^3-\frac{m^2-4n}{4\sqrt[3]{u^2}}\lambda^2-\frac{v\,m}{\sqrt[3]{u}}\lambda-v^2=0$$

e

$$b=-\sqrt[3]{u}.$$

Su questa superficie (come si vede dalla rappresentazione sul piano

doppio) i coni del fascio:

$$a x_1 x_2 + \mu x_3^2 = 0$$

(ove μ è un parametro) secano, oltre la retta $x_2 = x_3 = 0$ contata 2 volte, coppie di cubiche gobbe C_3 appartenenti ad un fascio ellittico (e corrispondenti alle generatrici del cono cubico).

I coni

$$b x_3 x_4 + \lambda x_1^2 = 0$$

secano pure coppie di curve C_3 dello stesso fascio (oltre alla retta $x_1 = x_4 = 0$, contata 2 volte). Le curve C_3 passano tutte pei punti (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0) ed ivi toccano rispettivamente le rette $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_4 = 0$. Due C_3 ottenute secando la superficie con uno stesso cono

$$a x_1 x_2 + \mu x_3^2 = 0,$$

si toccano in (0, 0, 0, 1) secondo un contatto tripunto. Analoghe cose dicansi per le coppie di C_3 secate dai coni dell'altro fascio:

$$b x_3 x_4 + \lambda x_1^2 = 0.$$

La superficie testè trovata verrà denotata con $F_4^{(3,1)}$. Il solo caso in cui tal superficie degenera in una superficie razionale è quando $u = 0$ ovvero $v = 0$ o, più in generale, quando l'equazione (8), e quindi anche la (9), ammette una radice multipla, perchè allora la superficie è rappresentabile su un piano doppio la cui curva di diramazione si riduce ad una conica, ed è quindi razionale.

Per istudiare la singolarità che la superficie $F_4^{(3,1)}$ ammette nel punto doppio (0, 0, 0, 1), trasformiamo la (7) colla trasformazione quadratica:

$$x_1 = y_1 y_4; \quad x_2 = y_2 y_4; \quad x_3 = y_3 y_4; \quad x_4 = y_1 (y_1 + y_3).$$

Dividendo l'equazione risultante per il fattore $y_1 y_4^2$, si ottiene la equazione:

$$y_1 y_2^2 (y_1 + y_3)^2 + m y_1 y_2 y_3 (y_1 + y_3) y_2 + n y_1 y_3^2 y_4^2 +$$
$$+ u y_3^3 (y_1 + y_3) y_4 + v y_1^2 y_2 y_4^2 = 0.$$

In questa, al punto singolare (0, 0, 0, 1) viene a corrispondere la retta $y_2 = y_4 = 0$ secondo cui la superficie vien toccata dal piano $y_4 = 0$. In particolare, su questa retta, il punto (1, 0, 0, 0) è un tacnodo; il piano tacnodale è $y_2 = 0$.

La singolarità della $F_4^{(3,1)}$ nel punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ è dunque un punto doppio cui si sia avvicinato indefinitamente un tacnodo *).

La stessa singolarità ha la $F_4^{(3,1)}$ nel punto (0, 1, 0, 0).

---

*) Vedasi per questa singolarità e la sua composizione: Segre: *Sulla scomposizione, etc.*, loc. cit., n° 21.

Dunque:

la superficie $F_4^{(3,1)}$ è dotata di due punti doppi uniplanari, ognuno dei quali è un punto doppio cui s'è avvicinato indefinitamente un secondo.

5. Nel n° 4 abbiamo supposto che, proiettando la superficie F_4 dal punto doppio O sopra un piano, la F_4 venisse rappresentata su un piano doppio la cui curva di diramazione si componesse di tre coniche toccantisi in due punti dati. Resta da far l'ipotesi che la curva di diramazione del piano doppio si componga di tre coniche toccantisi in uno stesso punto A secondo un contatto quadripunto, ossia resta da far l'ipotesi che il cono circoscritto ad F_4 da O si spezzi in tre coni di 2° ordine (irriducibili), toccantisi lungo la generatrice OA, secondo un contatto di 3° ordine. Tali coni verranno denotati con K_1, K_2, K_3 e con (K) verrà denotato il fascio di coni di 2° ordine cui essi appartengono. Cominciamo collo scegliere nello spazio un sistema di coordinate proiettive x_1, x_2, x_3, x_4 assoggettando per ora il tetraedro coordinato soltanto alle seguenti condizioni:

a) il punto $(0, 0, 0, 1)$ sia nel punto O;

b) il piano $x_3 = 0$ sia il piano tangente ai coni di (K), lungo la generatrice base OA;

c) il piano $x_2 = 0$ passi per OA;

d) il piano $x_1 = 0$ sia il piano tangente ad un certo cono K (preso comunque, purchè diverso dal piano $x_3 = 0$, contato 2 volte) del fascio (K), lungo la generatrice in cui K è secato (oltre ad OA) dal piano $x_2 = 0$.

Imponiamo per ora soltanto queste restrizioni al tetraedro coordinato: in seguito ne imporremo ancora altre. L'equazione del cono K sarà:

$$a x_1 x_3 + b x_2^2 = 0,$$

con $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Le equazioni dei coni K_1, K_2, K_3 saranno:

$$a x_1 x_3 + b x_2^2 + \lambda_i x_3^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ove i numeri λ_1, λ_2, λ_3 sono costanti e diversi fra loro.

Porremo, per semplicità:

$$p = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad q = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2, \quad r = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Con ciò λ_1, λ_2, λ_3 sono le radici dell'equazione:

$$(10) \qquad \lambda^3 - p\lambda^2 + q\lambda - r = 0,$$

che non deve ammettere radici doppie.

Il piano tangente nel punto uniplanare (n° 4) O alla F_4 è necessa-

riamente $x_3 = 0$, perchè (e lo si vede colla rappresentazione di F_4 sul piano doppio) esso soltanto seca F_4 secondo curve tutte razionali. Sicchè l'equazione di F_4 sarà del tipo:

$$(11) \qquad x_4^2 x_3^2 + 2x_4\varphi_3(x_1, x_2, x_3) + \varphi_4(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

ove φ_3 e φ_4 sono forme dei gradi 3 e 4 in x_1, x_2, x_3.

Porremo:

$$\varphi_3 \equiv \alpha x_3^3 + x_3^2 A_1 + x_3 A_2 + A_3,$$
$$\varphi_4 \equiv \beta x_3^4 + x_3^3 B_1 + x_3^2 B_2 + x_3 B_3 + B_4,$$

ove le A_i, B_i siano forme binarie in x_1, x_2, dei gradi indicati dai loro indici ed α, β sono costanti.

Il cono circoscritto da O ad F_4 è

$$\varphi_3^2 - x_3^2\varphi_4 = 0,$$

mentre, d'altro canto, esso dev'essere:

$$\prod_{1}^{3}{}_i (a x_1 x_3 + b x_2^2 + \lambda_i x_3^2) = 0.$$

Fra i due primi membri di queste due equazioni deve quindi esservi proporzionalità, ma noi intendiamo incorporato in a, b, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ la radice cubica del fattore di proporzionalità, sicchè possiamo dire che dev'essere:

$$\varphi_3^2 - x_3^2\varphi_4 \equiv \prod_{1}^{3}{}_i (a x_1 x_3 + b x_2^2 + \lambda_i x_3^2).$$

Uguagliando nei due membri di questa i coefficienti delle singole potenze di x_3, si hanno le relazioni:

$$\begin{aligned}
A_3^2 &\equiv b^3 x_2^6 \\
2A_2A_3 &\equiv 3ab^2 x_1 x_2^4 \\
A_2^2 + 2A_1A_3 - B_4 &\equiv b^2 p x_2^4 + 3a^2 b x_1^2 x_2^2 \\
2\alpha A_3 + 2A_1A_2 - B_3 &\equiv 2abp x_1 x_2^2 + a^3 x_1^3 \\
A_1^2 + 2\alpha A_2 - B_2 &\equiv a^2 p x_1^2 + b q x_2^2 \\
2\alpha A_1 - B_1 &\equiv a q x_1 \\
\alpha^2 - \beta &= r.
\end{aligned}$$

A queste relazioni si soddisfa pigliando ad arbitrio la costante α ed

il binomio $A_1 \equiv \mu x_1 + \nu x_2$ ed indi ponendo:

$$
(12) \quad \begin{cases}
A_3 \equiv b^{\frac{3}{2}} x_2^3 \\
A_2 \equiv \frac{3}{2} a b^{\frac{1}{2}} x_1 x_2 \\
B_4 \equiv 2 b^{\frac{3}{2}} A_1 x_2^3 - \frac{3}{4} a^2 b x_1^2 x_2^2 - b^2 p x_2^4 \\
B_3 \equiv 2 \alpha b^{\frac{3}{2}} x_2^3 - 3 a b^{\frac{1}{2}} A_1 x_1 x_2 - 2 a b p x_1 x_2^2 - a^3 x_1^3 \\
B_2 \equiv A_1^2 + 3 \alpha a b^{\frac{1}{2}} x_1 x_2 - a^2 p x_1^2 - b q x_2^2 \\
B_1 \equiv 2 \alpha A_1 - a q x_1 \\
\beta = \alpha^2 - r.
\end{cases}
$$

Determinando in questa guisa le forme φ_3, φ_4 che entrano in (11), verremo a determinare la superficie di 4° ordine soddisfacente alle condizioni volute.

Per averne l'equazione ancor più semplificata, sottoponiamo a novelle condizioni il tetraedro coordinato. Perciò:

e) scegliamo anzitutto il cono K, di cui s'è parlato in *d*), in maniera che poi risulti $p = 0$, e ciò sempre si può, evidentemente, ottenere.

Dopo aver fatto ciò ed avere conseguentemente scelto, com'è detto nella *d*) e nella *c*), i piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ [ferme restando le condizioni *a*) e *b*)], osserviamo che la retta $x_1 = x_3 = 0$ secherà la superficie, oltre che nel punto (0, 0, 0, 1) in un punto *da esso distinto* (come si vede dalla (11), badando alle (12) e tenendo presente che $p = 0$).

Il piano $x_3 = 0$ e così anche il piano $x_1 = 0$ non toccano la superficie in tal punto, perchè nessuno di tali piani appartiene al cono circoscritto dal punto (0, 0, 0, 1) alla superficie. Noi:

f) sceglieremo per piano $x_4 = 0$ quello che tocca la superficie nel punto [diverso da (0, 0, 0, 1)] in cui essa è secata dalla retta $x_1 = x_2 = 0$,

g) sceglieremo inoltre il punto unità in guisa che risulti $b^{\frac{1}{2}} = 1$.

Con ciò, verremo a semplificare l'equazione proveniente dalla (11) e dalle (12), perchè, per la maniera con cui s'è scelto il tetraedro fondamentale, risulta:

$$p = 0, \qquad \alpha = 0, \qquad A_1 \equiv 0, \qquad b^{\frac{1}{2}} = 1.$$

L'equazione (11) allora, scritta per disteso, dopo aver tenuto conto delle (12) e di queste condizioni, diviene:

$$
(13) \qquad \begin{aligned} &x_4^2 x_3^2 + 3 a x_1 x_2 x_3 x_4 + 2 x_2^3 x_4 - r x_3^4 \\ &- a q x_1 x_3^3 - q x_2^2 x_3^2 - a^3 x_1^3 x_3 - \frac{3}{4} a^2 x_1^2 x_2^2 = 0 \text{ *)}. \end{aligned}
$$

Teniamo presente però che nella (13) è $a \neq 0$ e che i numeri q ed r son tali che l'equazione

$$(14) \qquad \lambda^3 + q\lambda - r = 0$$

sia priva di radici doppie.

La retta $x_2 = x_3 = 0$ appartiene alla superficie, anzi il piano $x_3 = 0$ seca la superficie secondo tal retta contata 2 volte e la conica:

$$x_3 = 0, \qquad 2 x_2 x_4 - \frac{3}{4} a^2 x_1^2 = 0,$$

conica la quale tocca nel punto (0, 0, 0, 1) la retta $x_2 = x_3 = 0$ e nel punto (0, 1, 0, 0) la retta $x_3 = x_4 = 0$.

Sulla superficie (13) esiste (come sappiamo) un fascio ellittico di curve razionali γ, sezioni variabili di essa con coni del fascio:

$$(15) \qquad a x_1 x_3 + x_2^2 + \lambda x_3^2 = 0,$$

ove λ è un parametro. Sopra ogni cono di tal fascio stanno, come sappiamo, 2 curve γ. I coni (15) toccano il piano $x_3 = 0$ lungo la retta $x_2 = x_3 = 0$ (anzi essi si toccano ivi, scambievolmente, con contatto di 3° ordine), e lungo tal retta il piano $x_3 = 0$ tocca anche la superficie.

La retta $x_2 = x_3 = 0$ è dunque contata almeno 2 volte come intersezione fissa della superficie coi coni del fascio (15). Ma non è contata più di 2 volte, perchè, altrimenti, le curve γ dovrebbero essere coniche o rette e si vede subito che ciò non può avvenire.

Quindi le curve γ sono cubiche gobbe, che denoteremo con C_3. Due qualunque di queste curve non possono secarsi in punti distinti dal punto (0, 0, 0, 1), perchè la superficie non può possedere curve doppie, nè possiede punti doppi, diversi da (0, 0, 0, 1) sulla retta $x_2 = x_3 = 0$, quindi *due* C_3 *generiche si toccheranno nel punto* (0, 0, 0, 1) *secondo un contatto quadripunto,* mentre *due* C_3 *ottenute secando la superficie con uno stesso cono del fascio* (15), *si toccano ivi con contatto quipunto.*

La superficie in discussione verrà denotata con $F_4^{(3,2)}$. I piani lungo la retta $x_2 = x_3 = 0$ la secano (oltre che in questa retta) in cubiche dotate di flesso nel punto (0, 0, 0, 1) e toccanti ivi la retta $x_2 = x_3 = 0$.

---

*) Le condizioni *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), *g*) lasciano ancora indeterminazione nella scelta del tetraedro fondamentale, e forse potranno ottenersi equazioni più semplici di (13), profittando di quest'indeterminazione, ma a me non è riuscito.

Il cono circoscritto alla $F_4^{(3,2)}$, rappresentata dall'equazione (13), dal punto (0, 0, 0, 1), si spezza nei tre coni:

$$a x_1 x_3 + x_2^2 + \lambda_i x_3^2 = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ove λ_1, λ_2, λ_3, sono le radici dell'equazione (14).

Con ragionamenti analoghi a quelli dei n[i] precedenti, si mostra che: *la singolarità della $F_4^{(3,2)}$ nel punto (0, 0, 0, 1) è un punto doppio a cui si sia avvicinato indefinitamente la singolarità che trovammo sulla superficie $F_4^{(2,2)}$ (n° 3).*

6. Passate così in rassegna le superficie di 4° ordine rappresentabili sul cono cubico, vogliamo vedere quali di esse possano ulteriormente acquistare punti doppi e quanti ne possono acquistare. Escludiamo subito le rigate, che non possono, com'è noto, avere punti multipli isolati.

Cominciamo ora dal mostrare che:

le superficie $F_4^{(3,1)}$, $F_4^{(3,2)}$ non possono possedere punti doppi oltre quelli che già sappiamo appartenervi (n[i] 4 e 5).

Pigliamo, ad esempio, a considerare la superficie $F_4^{(3,1)}$, e proiettiamola, da uno dei suoi due punti singolari già esaminati (n° 4), sopra un piano. Denoteremo con O il punto singolare considerato, con O' l'altro punto singolare, con φ il piano su cui proiettiamo la $F_4^{(3,1)}$. Essa viene ad essere rappresentata sopra un piano doppio φ la cui curva di diramazione si compone di 3 coniche toccantisi in due punti A, B, ove A è il punto ove φ è secato dalla retta $O O'$ e B il punto ove φ è secato dalla retta, uscente da O, la quale vien toccata in O dalle cubiche gobbe del fascio ellittico appartenente ad $F_4^{(3,1)}$. Se la superficie contenesse un punto doppio P, oltre O ed O', dico anzitutto che P non potrebbe appartenere alla retta $O B$. Difatti, i piani per $O B$ secano (n° 4) la $F_4^{(3,1)}$, oltre che lungo $O B$, secondo cubiche piane aventi in O un flesso ed ivi per tangente la $O B$: sicchè tutti i punti di $O B$ diversi da O sono semplici per la $F_4^{(3,1)}$. D'altro canto, sia C il punto in cui la retta $O P$ seca il piano φ. Le rette del piano φ passanti per C, dovrebbero corrispondere (doppiamente) alle sezioni variabili di $F_4^{(3,1)}$ con piani per $O P$. Intanto il punto C è diverso da B, ed è anche diverso da A, perchè la retta $O'O$ non può appartenere alla superficie (n° 4). Adunque le rette del piano φ, passanti per C, incontrano la curva di diramazione di φ in 6 punti variabili (o in 5), e quindi le sezioni variabili di $F_4^{(3,1)}$ per $O P$ dovrebbero esser di genere 2, il che non può mai avverarsi nel caso in cui P sia un punto doppio. Ragionamenti analoghi servono per la $F_4^{(3,2)}$.

Passiamo ora a discutere il caso della superficie $F_4^{(2,1)}$ (n° 3). Deno-

tiamo con O, O' i suoi tacnodi, con π, π' i piani tangenti. Assumendo nello spazio un sistema di coordinate cartesiane omogenee x, y, z, t, ponendo i punti O, O' all'infinito sugli assi delle x e delle y, e pigliando come piani π, π' i piani $y=0$, $x=0$, l'equazione della $F_4^{(2,1)}$ è, come sappiamo:

$$x^2y^2 + 2xyf_2(z, t) + f_4(z, t) = 0,$$

essendo f_2 ed f_4 forme di 2° e 4° grado in z, t tali che l'equazione

$$f_2^2 - f_4 = 0$$

sia priva di radici doppie.

Proiettando da O la superficie sopra un piano doppio φ, questo viene ad avere come curva di diramazione il sistema di 4 rette distinte, passanti pel punto A, ove φ è secata dalla retta OO' (n° 3). Ora, se $F_4^{(2,1)}$ deve possedere un punto doppio P, diverso da O e da O', tal punto non può stare sulla retta OO', perchè essa non può appartenere alla $F_4^{(2,1)}$.

Denotiamo quindi con B l'intersezione del piano φ colla retta OP: il punto B è diverso da A. Le rette di φ per B corrispondono doppiamente alle sezioni variabili di $F_4^{(2,1)}$ con piani per OP: e, siccome esse secano la curva di diramazione di φ in 4 (o 3) punti variabili, segue che le sezioni variabili di $F_4^{(2,1)}$ con piani per OP devono esser curve di genere 1. Segue che la retta OP appartiene ad $F_4^{(2,1)}$ e che le sezioni residue di questa con piani per OP sono cubiche passanti per P e tangenti in O alla OP. Quindi fra i piani passanti per OP, ve n'è uno che tocca $F_4^{(2,1)}$ lungo OP. Si vede subito che questo piano deve essere necessariamente quello tangente in O ad $F_4^{(2,1)}$. Quindi *la retta OP deve, contata 2 volte, appartenere all'intersezione di $F_4^{(2,1)}$ col suo piano tangente in O.* Analogamente *la retta $O'P$ appartiene, contata 2 volte, all'intersezione di $F_4^{(2,1)}$ col suo piano tangente in O'.* Il punto P giace quindi sulla intersezione dei piani π, π' (asse delle z).

Ora i piani π, π' secano la $F_4^{(2,1)}$ ciascuno secondo 4 rette, intersezioni di questi piani coi piani

$$f_4(z, t) = 0.$$

Segue che *al massimo 2 sono i punti doppi che possono essere ulteriormente contenuti da una $F_4^{(2,1)}$.* E, per verificare che, effettivamente 2 punti doppi possono esser contenuti da una $F_4^{(2,1)}$ (oltre ai tacnodi che essa possiede), basta supporre che uno di essi sia nell'origine delle coordinate, l'altro nel punto all'infinito dell'asse delle z, per la qual cosa basta che sia

$$f_4(z, t) \equiv a z^2 t^2.$$

In particolare, potrebbero tali punti essere infinitamente vicini, ad es.,

nell'origine. Allora

$$f_4(z, t) \equiv a z^4.$$

Badando, in ogni caso, che l'equazione

$$f_2^2(z, t) - f_4(z, t) = 0$$

dev'esser priva di radici multiple, si vede che quando vi sono, oltre O ed O', 2 punti doppi distinti, essi *sono necessariamente conici*, mentre quando ve n'è uno solo, esso può anche essere biplanare ed avere, in particolare, *un solo* altro punto doppio infinitamente vicino.

Dunque:

La $F_4^{(2,1)}$ può avere 0, 1, 2 punti doppi, oltre O ed O', privi di altri punti doppi infinitamente vicini, ovvero una coppia di punti doppi tra loro infinitamente vicini.

Passiamo ora a discutere il caso della superficie $F_4^{(2,2)}$. Esso esige una analisi un po' minuziosa. Denotiamo con O il punto singolare (tacnodo speciale), con π il piano tangente ivi. Se P è un ulteriore punto doppio, si dimostra, come avanti, che la retta OP appartiene ad $F_4^{(2,2)}$, e che anzi v'è un piano che tocca la $F_4^{(2,2)}$ lungo OP. Servendosi della rappresentazione (n° 3) della $F_4^{(2,2)}$ su un piano doppio (proiettandola ivi da O), e pensando che il piano che tocca la $F_4^{(2,2)}$ lungo la OP deve secare la $F_4^{(2,2)}$ lungo un insieme di curve razionali e che nello stesso tempo OP dev'esser contenuta in π, si trova che precisamente *il piano π deve toccare la $F_4^{(2,2)}$ lungo la retta OP.* Ciò posto, scriviamoci l'equazione di $F_4^{(2,2)}$ in coordinate cartesiane omogenee, ponendo il punto O all'infinito sull'asse delle x ed il piano π nel piano all'infinito. L'equazione di $F_4^{(2,2)}$ è:

$$x^2 t^2 + 2 x t f_2(y, z, t) + [f_2^2(y, z, t) - \psi_4(z, t)] = 0,$$

la f_2 e ψ_4 essendo forme nelle variabili indicate in parentesi, dei gradi 2 e 4. Teniamo presente che la y entra effettivamente al 2° grado in f_2 e che l'equazione $\psi_4(z, t) = 0$ non deve ammettere radici multiple.

Perciò poniamo:

$$f_2(y, z, t) \equiv a y^2 + b y z + c z^2 + t(m y + n z) + l t^2$$

e teniamo presente che $a \neq 0$. Poniamo inoltre:

$$\psi_4(z, t) \equiv \alpha z^4 + \beta z^3 t + \gamma z^2 t^2 + \delta z t^3 + \varepsilon t^4.$$

Se la superficie possiede un punto doppio P, essa dev'esser toccata dal piano $t = 0$ lungo OP. Ora possiamo supporre essere il punto P il

punto all'infinito sull'asse delle z. La $F_4^{(2,2)}$ deve allora venir toccata dal piano $t = 0$ lungo la retta all'infinito del piano delle x, z e perciò bisogna che s'abbia:

$$(16) \qquad c^2 - \alpha = 0, \qquad bc = 0.$$

A queste si può soddisfare in due modi. Si può anzitutto volere che sia $c \neq 0$. Allora è $\alpha \neq 0$, $b = 0$: il piano $t = 0$ seca la superficie nel sistema di rette che hanno per equazioni:

$$t = 0, \qquad ay^2(ay^2 + 2cz^2) = 0.$$

Tenendo presente che $a \neq 0$, $c \neq 0$ e che quindi il binomio $ay^2 + 2cz^2$ non è mai un quadrato, si ha che, in tal caso, *non vi possono essere punti doppi posti fuori della retta all'infinito del piano delle* x, z. Ma su questa retta non può esservi che un sol punto doppio diverso da O, perchè altrimenti essa sarebbe doppia per la superficie, il che (n° 2) è assurdo.

Adunque *un solo può essere, in tal caso, il punto doppio, diverso da* O, *che può possedere la superficie* $F_4^{(2,2)}$. Per vedere che esso può effettivamente esistere, basta supporre $\alpha = c^2$, $b = 0$ e $\beta - 2cn = 0$, e con ciò tal punto P lo si viene a porre all'infinito sull'asse delle z.

Proiettando da P la $F_4^{(2,2)}$ sopra un piano, si vede subito che la $F_4^{(2,2)}$ viene così a rappresentarsi sopra un piano doppio φ la cui curva di diramazione si compone di tre coniche toccantisi in uno stesso punto A secondo un contatto quadripunto (A è il punto ove φ è secato da OP).

Mediante questa rappresentazione vedesi che il punto P è *necessariamente un punto doppio conico.*

Passiamo ora al caso in cui si voglia soddisfare alle (16) ponendo $c = 0$. Sorge allora $\alpha = 0$ (e quindi la superficie si specializza in una $F_4^{(2,2,1)}$). Ora, se un punto P doppio, diverso da O, esistesse, esso potrebbe, per ciò che s'è detto, porsi nel punto all'infinito dell'asse delle z. Ma allora dovrebbe essere $\beta = 0$, il che (essendo $\alpha = 0$) è incompatibile col fatto che l'equazione $\psi_4(z, t) = 0$ dev'esser priva di radici doppie.

Dunque:

la superficie $F_4^{(2,2)}$ *non può possedere, oltre ad* O, *che un sol punto doppio (conico); la superficie specializzata* $F_4^{(2,2,1)}$ *nessuno.*

7. Riassumendo ciò che abbiam detto nei n^{i} precedenti, si ha il seguente teorema:

Le superficie di 4° *ordine, irrazionali, di genere geometrico superficiale*

$p_g = 0$ *o sono coni (irrazionali) ovvero sono le superficie raccolte nel seguente quadro (le quali sono rappresentabili sul cono cubico).*

Per maggior comodità del lettore tenteremo di riassumere in 3 quadri le proprietà più salienti di tali superficie, proprietà che già abbiamo trovate. Però, siccome tutto non si può riassumere, preghiamo il lettore, che voglia conoscere delle varie superficie tutti i risultati cui siamo pervenuti, di leggerli nei vari n^i in cui le abbiamo discusso.

I. QUADRO

superficie di 4° ordine, irrazionali, non coni, di genere $p_g = 0$, classificate a seconda delle loro singolarità.

LORO [D]ENOMINAZIONE.	SINGOLARITÀ CHE LE DETERMINANO.	ALTRE SINGOLARITÀ CHE POSSONO POSSEDERE.
$F_4^{(1,1)}$	Due rette (sghembe) doppie *).	0
$F_4^{(1,2)}$	Una retta tacnodale **).	0
$F_4^{(2,1)}$	Due tacnodi.	0, 1 ovvero 2 punti doppi conici od 1 punto doppio biplanare, il cui asse può essere o tangente tripunta o quadripunta.
$F_4^{(2,2)}$	Un tacnodo speciale risultante di un punto doppio cui sia indefinitamente vicina una retta doppia infinitesima, sulla quale sta un oscnodo.	0 ovvero 1 punto doppio conico.
$F_4^{(2,2,1)}$ [s]pecializzazione di $F_4^{(2,2)}$	La sua singolarità si ottiene dalla precedente, imponendo alle sezioni per essa d'avervi un regresso di 2ª specie (Per la sua composizione generale vedasi la fine del n° 3).	0
$F_4^{(3,1)}$	Due punti doppi distinti a ciascuno dei quali è indefinitamente vicino un tacnodo.	0
$F_4^{(3,2)}$	Un punto doppio cui é indefinitamente vicina la singolarità che definisce una $F_4^{(2,2)}$.	0

*) Su ciascuna di esse stanno 4 *pince-points* distinti.

**) Su di essa stanno 4 punti distinti ove le sezioni piane hanno, invece che tacnodi, regressi di 2ª specie.

II. QUADRO

Equazioni in coordinate omogenee, cui possono sempre ridursi, con una trasformazione omografica, le equazioni delle suddette superficie.

SUPERFICIE.	LORO EQUAZIONI.	SIGNIFICATO DEI SIMBOLI E CONDIZIONI: LE f, φ, ψ DENOTANO FORME, NELLE VARIABILI INDICATE ENTRO PARENTESI, DEI GRADI DATI DAGL'INDICI; LE u, v, m, n, a, q, r DENOTANO COSTANTI.
$F_4^{(1,1)}$	$x^2 f_2(z, t) + 2xy\varphi_2(z, t) + y^2\psi_2(z, t) = 0$	L'equazione $\varphi_2^2(z, t) - f_2(z, t)\psi_2(z, t) = 0$ è priva di radici multiple.
$F_4^{(1,2)}$	$x^2t^2 + 2xtf_2(y, z, t) + [f_2^2 - \psi_4(z, t)] = 0$	La y entra al 1° grado in f_2, il suo coefficiente dipende effettivamente da z; l'equazione: $\psi_4(z, t) = 0$ è priva di radici multiple.
$F_4^{(2,1)}$	$x^2y^2 + 2xyf_2(z, t) + f_4(z, t) = 0$	L'equazione: $f_2^2 - f_4 = 0$ è priva di radici multiple.
$F_4^{(2,2)}$	$x^2t^2 + 2xtf_2(y, z, t) + [f_2^2 - \psi_4(z, t)] = 0$	La y entra effettivamente al 2° grado in f_2; l'equazione $\psi_4(z, t) = 0$ è priva di radici multiple.
sua specializzata $F_4^{(2,2,1)}$	idem	idem; ancora $\psi_4(z, t)$ è divisibile per t (ma non per t^2).
$F_4^{(3,1)}$	$y^2t^2 + mxyzt + nx^2z^2 + uz^3t + vx^3y = 0$	$u \neq 0$, $v \neq 0$ e l'equazione: $\lambda^3 - \frac{m^2 - 4n}{4\sqrt[3]{u^2}}\lambda^2 - \frac{vm}{\sqrt[3]{u}}\lambda - v^2 = 0$ o (ciò che fa lo stesso): $\mu^3 - \frac{m^2 - 4n}{4\sqrt[3]{v^2}}\mu^2 - \frac{um}{\sqrt[3]{v}}\mu - u^2 = 0$ non ammette radici multiple.
$F_4^{(3,2)}$	$z^2t^2 + 3axyzt + 2y^3t - rz^4 - aqxz^3 - qy^2z^2 - a^3x^3z - \frac{3}{4}a^2x^2y^2 = 0$	$a \neq 0$; l'equazione $\lambda^3 + q\lambda - r = 0$ è priva di radici multiple.

III. QUADRO

razionali γ che formano sulle varie superficie predette fascio ellittico.

E.	CURVE γ.
	Rette appoggiantisi alle due direttrici doppie, secate coppie a coppie dai piani passanti per una qualunque di esse.
	Rette secate coppie a coppie dai piani per la retta tacnodale.
	Coniche secate coppie a coppie dai piani passanti pei due tacnodi.
ioni	Coniche secate a coppie a coppie dai piani passanti per la retta congiungente il punto doppio singolare all'oscnodo della retta doppia infinitesima ad esso infinitamente vicina.
	Cubiche gobbe ottenute coppia a coppia come sezioni variabili della $F_4^{(3,1)}$ con coni di 2° ordine aventi il vertice in uno qualunque dei punti singolari e toccantisi lungo due generatrici distinte. Una di queste è la retta secondo cui la $F_4^{(3,1)}$ è toccata dal suo piano tangente nel punto singolare dato, e tal piano è tangente comune ivi ai diversi coni di 2° ordine; l'altra è la retta che proietta il 2° punto singolare, ed il piano tangente comune ivi ai vari coni è quello che da tale retta proietta l'origine del tacnodo infinitamente vicino al 2° punto singolare.
	Cubiche gobbe ottenute coppia a coppia secando la superficie con certi coni di 2° ordine aventi il vertice nel punto singolare e toccantisi secondo un contatto di 3° ordine lungo la retta di $F_4^{(3,2)}$ uscente da tal punto (n° 5).

8. Osservando che le superficie irrazionali di genere $p_g = 0$ e di 4° ordine sono rappresentabili (n° 1) su coni irrazionali e quindi posseggono differenziali totali di 1ª specie (e precisamente il numero di quelli indipendenti è eguale al genere delle sezioni di tali coni), si ricava il seguente teorema:

Le superficie di 4° ordine, di genere $p_g = 0$, possedenti differenziali totali di 1ª specie, o sono coni (irrazionali) ovvero la loro equazione può ridursi, con una trasformazione lineare, ad uno dei seguenti tipi:

a) $$x^2 f_2(z, t) + 2xy\varphi_2(z, t) + y^2\psi_2(z, t) = 0$$

b) $$x^2 y^2 + 2xyf_2(z, t) + f_4(z, t) = 0$$

c) $$x^2 t^2 + 2xtf_2(y, z, t) + [f_2^2(y, z, t) - \psi_4(z, t)] = 0$$

d) $$y^2 t^2 + mxyzt + nx^2z^2 + uz^3t + vx^3y = 0$$

e) $$z^2t^2 + 3axyzt + 2y^3t - rz^4 - aqxz^3 - qy^2z^2 - a^3x^3z - \frac{3}{4}a^2x^2y^2 = 0 \text{ *)}.$$

I coefficienti che figurano nelle equazioni *a*), *b*), *d*), *e*) soddisfanno alle condizioni esposte nel quadro II, mentre quelli di *c*) devono soddisfare o alle condizioni ivi esposte, relative ad una $F_4^{(2,2)}$ od a quelle relative ad una $F_4^{(1,2)}$.

§ 2.

9. Dopo avere, nel precedente §, determinato le superficie di 4° ordine rappresentabili sul cono cubico, vogliamo in questo studiarne la rappresentazione ivi.

Cominciamo dai coni di 4° ordine con 2 generatrici doppie distinte od infinitamente vicine. Ogni trasformazione quadratica, degenere, dello spazio, avente come curva fondamentale l'insieme di queste due generatrici, e come punto fondamentale un qualunque punto del cono, trasforma il cono dato in un cono cubico. Ai piani dello spazio dato corrispondono, in quello del cono cubico, superficie di 2° ordine passanti per due generatrici (distinte od infinitamente vicine) del cono cubico ed, inoltre, per

---

*) Il sig. Poincaré nell'enunciare una proposizione, nella quale vuole assegnare i tipi di equazioni di 4° grado in 3 variabili, possedenti differenziali totali di prima specie, lascia sfuggirsi la *c*), *d*), *e*) (Comptes Rendus, t. XCIX); altrettanto fa il signor Picard nella sua *Théorie des fonctions algébriques*, etc., loc. cit., Cap. V, § III, n° 14, nel voler dimostrare la proposizione di Poincaré.

un certo punto fisso, fuori del cono. Sicchè il sistema di curve sezioni piane del cono di $4^°$ ordine viene a trasformarsi sul cono cubico in un sistema lineare ∞^3 (incompleto) di curve gobbe ellittiche di $4^°$ ordine passanti pel vertice del cono cubico e tangenti ivi alla 3^a generatrice intersezione del cono cubico col piano che passa per le due generatrici base (ed incontranti in un punto variabile ciascun'altra generatrice). Il sistema completo in cui esso è contenuto, è ∞^4 ed è secato dalle quadriche passanti per le due date generatrici del cono cubico. Esso rappresenta il cono normale di $4^°$ ordine, ellittico, dello spazio a 4 dimensioni, di cui il cono di $4^°$ ordine dato è proiezione.

10. Passiamo ora a rappresentare le rigate ellittiche di $4^°$ ordine. Cominciamo dalla $F_4^{(1,1)}$ dotata di due rette doppie (sghembe). Denotiamo con r_1, r_2 tali rette. Trasformiamo quadraticamente la $F_4^{(1,1)}$ assumendo come conica fondamentale la conica degenere costituita dalla retta r_1 e da una generatrice della rigata $F_4^{(1,1)}$, e pigliando il punto fondamentale O sulla retta r_2. La $F_4^{(1,1)}$ si trasforma così in un cono cubico: le sue generatrici si trasformano nelle generatrici del cono cubico. Nello spazio di questo, le quadriche corrispondenti ai piani dello spazio di $F_4^{(1,1)}$ hanno due rette basi, poste in un piano, una delle quali è generatrice del cono, mentre l'altra non lo è; inoltre tali quadriche hanno un punto base semplice sul cono cubico. Sicchè le immagini delle sezioni piane di $F_4^{(1,1)}$ sul cono cubico sono curve gobbe C_5, di $5^°$ ordine, dotate di punto doppio nel vertice del cono (ed incontranti in un punto variabile le generatrici) dotate inoltre di 3 punti base semplici.

Per trasformare in un cono cubico la $F_4^{(1,2)}$ con una retta tacnodale r, basterà assumere questa ed una generatrice qualunque di $F_4^{(1,2)}$ come rette fondamentali d'una trasformazione quadratica speciale, ed imporre ancora alle quadriche che devono definire tal trasformazioue di toccare la $F_4^{(1,2)}$ in un punto dato di r, diverso dal punto ove secansi le due rette già assunte come fondamentali. Nello spazio del cono cubico le quadriche corrispondenti ai piani dello spazio ove giace $F_4^{(1,2)}$ hanno per rette basi una generatrice del cono cubico ed una retta (non generatrice), ad essa appoggiantesi, ed inoltre toccano, in un punto della generatrice base, il cono cubico. Le immagini delle sezioni piane di $F_4^{(1,2)}$ sono ancora curve di $5^°$ ordine C_5 con un punto doppio nel vertice del cono e 3 punti base semplici.

La differenza tra questo sistema ed il precedente sta in ciò, che nel

sistema in discussione i tre punti base semplici ed il vertice stanno su uno stesso piano.

11. Passiamo alle superficie di 4° ordine con un fascio ellittico di coniche e cominciamo dalla $F_4^{(2,1)}$ con 2 tacnodi O, O'. Come sappiamo (n[i] 3 e 6), esistono piani (in generale 4) passanti contemporaneamente pei due tacnodi e contenenti coppie di rette della superficie; ognuna di tali rette giace sopra un piano tacnodale.

Assumiamo come rette fondamentali d'una trasformazione quadratica una di tali coppie di rette, imponendo inoltre alle quadriche passanti ivi di toccare nel punto O il piano tacnodale corrispondente. Trasformando così quadraticamente la $F_4^{(2,1)}$, essa si trasporta in un cono cubico. Nello spazio di questo il sistema omaloidico definito dalla trasformazione è costituito dalle quadriche che passano per 2 rette non generatrici del cono, una delle quali tocca il cono in un punto nel quale il cono viene altresì toccato dalle quadriche. Le immagini delle sezioni piane della superficie $F_4^{(2,1)}$ sul cono sono così curve C_6 di 6° ordine dotate d'un punto base doppio e di altri 4 punti base semplici, tre dei quali allineati fra loro, ed inoltre tali che il punto base doppio e gli altri 4 semplici stanno in uno stesso piano, e che la retta congiungente il punto base semplice, diverso dai 3 allineati, col punto base doppio è ivi tangente al cono cubico. Nessuno di tali punti base cade nel vertice, le C_6 secano in 2 punti variabili le generatrici del cono, etc. etc.

Per trasformare la $F_4^{(2,1)}$ in un cono cubico avremmo potuto adoperare una trasformazione quadratica più generale della precedente: bastava assumere come conica fondamentale una qualunque delle infinite coniche giacenti su $F_4^{(2,1)}$ (e passanti per due tacnodi) ed imporre inoltre alle quadriche passanti ivi di toccare nel punto O (od in O') il corrispondente piano tacnodale. Nello spazio del cono cubico, ai piani dello spazio di $F_4^{(2,1)}$ corrispondono quadriche passanti per una conica non passante pel vertice del cono e toccante il cono in un punto, nel quale il cono viene toccato dalle quadriche. Così il sistema delle sezioni piane di $F_4^{(2,1)}$ viene a trasformarsi in un sistema di curve C_6 di 6° ordine dotate d'un punto base doppio e di altri 4 punti base semplici giacenti con quello in uno stesso piano. Tal sistema di curve può però sempre, evidentemente, riportarsi al sistema precedente, almeno finchè il piano contenente i 5 punti base non passi pel vertice del cono, ciò che non può accadere per la $F_4^{(2,1)}$ la quale è dotata di due tacnodi distinti, uno dei quali corrisponde alla generatrice del cono

passante pel punto base doppio delle C_6, mentre l'altro corrisponde alla sezione del cono col piano passante pei 5 punti base.

Questa stessa trasformazione può applicarsi alla superficie $F_4^{(2,2)}$ con un tacnodo speciale O. Sul cono cubico le immagini delle sezioni piane di $F_4^{(2,2)}$ vengono ancora ad essere curve C_6 di 6° ordine con un punto base doppio e 4 semplici, giacenti in un piano, il quale passa pel vertice. Precisamente i 4 punti base semplici stanno 2 a 2 su due generatrici, il punto doppio su una 3^a generatrice giacente con quelle in uno stesso piano.

12. Vogliamo adesso studiare la rappresentazione sul cono cubico della superficie $F_4^{(3,1)}$ (n° 4). Noi siamo qui riusciti a rappresentare tutte le superficie precedenti, adoperando trasformazioni quadratiche. Qui questo non è più, evidentemente, possibile, poichè le immagini delle sezioni piane di $F_4^{(3,1)}$ sul cono cubico devono secare le generatrici del cono in tre punti variabili, e quindi non possono essere contenute da superficie del 2° ordine. Qui noi riusceremo a trasformare la $F_4^{(3,1)}$ in un cono cubico, mercè una trasformazione Cremoniana del 3° ordine (e quindi del minimo ordine possibile), la cui inversa è pure del 3° ordine.

Anzitutto, scriviamoci l'equazione di $F_4^{(3,1)}$ in coordinate proiettive, scegliendo il tetraedro coordinato come nel n° 4. Allora tale equazione è:

$$x_2^2 x_4^2 + m x_1 x_2 x_3 x_4 + u x_3^3 x_4 + v x_1^3 x_2 + n x_1^2 x_3^2 = 0.$$

Trasformiamola colla trasformazione le cui formole sono: *)

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 z_2^2 & \qquad z_1 &= x_1 x_2 x_3 \\ x_2 &= z_3 z_4^2 & z_2 &= x_2 x_3 x_4 \\ x_3 &= z_2 z_3 z_4 & z_3 &= x_3^3 \\ x_4 &= z_2^3 & z_4 &= x_2^2 x_4 \end{aligned}$$

dividendo l'equazione ottenuta per il fattore $z_2^6 z_3 z_4^2$, s'ottiene l'equazione di un cono cubico:

$$K_3 \equiv z_3 z_4^2 + m z_1 z_3 z_4 + u z_3^2 z_4 + v z_1^3 + n z_1^2 z_3 = 0.$$

Il cono K_3 ha il vertice nel punto $z_1 = z_3 = z_4 = 0$.

---

*) Ho trovato questa trasformazione come prodotto di queste due:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 y_4; & \qquad y_1 &= z_1 z_2; \\ x_2 &= y_2 y_3; & y_2 &= z_2 z_4; \\ x_3 &= y_3 y_4; & y_3 &= z_3 z_4; \\ x_4 &= y_4^2; & y_4 &= z_2^2; \end{aligned}$$

la prima delle quali trasforma la $F_4^{(3,1)}$ in una superficie di 4° ordine con due tacnodi ed un punto doppio biplanare. La seconda è una delle trasformazioni quadratiche (n° 12) che fanno passare da tal superficie ad un cono cubico.

Nello spazio $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ ai piani dello spazio (x_1, x_2, x_3, x_4) corrispondono le superficie di 3° ordine:

$$S_3 \equiv [illegible] = 0.$$

La retta $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ è base semplice e lungo essa le S_3 toccano il piano $\zeta_1 = 0$; la retta $\zeta_1 = \zeta_4 = 0$ è invece base doppia (e le S_3 son quindi rigate*)). Esse nel punto $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_4 = 0$ toccano il piano $\zeta_1 = 0$. Per tal punto passa pure il cono K_3 ed ivi tocca $\zeta_4 = 0$ e quindi le S_3. Nel punto $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0$ tanto le S_3 che K_3 osculano il piano $\zeta_3 = 0$ e quindi osculansi fra loro.

La retta $\zeta_1 = \zeta_4 = 0$ incontra il cono K_3, oltre che nel punto $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_4 = 0$ contato 2 volte, ancora in un punto P, di coordinate $(1, 0, -1, 0)$. *Le S_3 secano quindi il cono K_3 lungo curve C_9 di 9° ordine aventi in P un punto base doppio, nel punto $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0$ un punto base triplo, e nel punto $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_4 = 0$ un punto base triplo con una tangente fissa (come vedesi facilmente) nella retta $\zeta_2 = \zeta_4 = 0$.* Così vengono quindi a rappresentarsi sul cono K_3 le sezioni piane di $F_4^{(3,1)}$. Le curve fondamentali del sistema ∞^3 (lineare, semplice e completo) di curve C_9 sono 2, cioè: la curva sezione di K_3 col piano $\zeta_2 = 0$ e la coppia di generatrici $\zeta_1 = \zeta_3 = 0$, $\zeta_1 = \zeta_4 = 0$. Esse corrispondono ai due punti singolari della $F_4^{(3,1)}$.

13. Occupiamoci ora della rappresentazione della superficie $F_4^{(3,2)}$ (n° 5). Anche questa ridurremo in un cono cubico mediante una trasformazione Cremoniana del 3° ordine, simile alla precedente. Tra tutte le possibili, questa è del minimo ordine (n° 12).

Scriviamoci l'equazione in coordinate non omogenee della $F_4^{(3,2)}$, ricavandola dalla (13) del n° 5, dopo aver posto:

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad \frac{x_4}{x_3} = z.$$

Con ciò, tale equazione è:

$$z^2 + (3axy + 2y^3)z - \left(\frac{3}{4}a^2x^2y^2 + a^3x^3 + qy^2 + aqx + r\right) = 0,$$

la quale dà:

$$z = -\frac{1}{2}(3axy + 2y^3) + \sqrt{\prod_1^3 (ax + y^2 + \lambda_i)},$$

*) Vedasi, per tale trasformazione, Cremona: *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (Ann. di Mat., t. V_2, 1872), n°. 37.

ove λ_1, λ_2, λ_3 sono le radici (distinte) dell'equazione:

$$\lambda^3 + q\lambda - r = 0.$$

Adoperando la trasformazione di 3° ordine:

$$x = \frac{1}{a}(x' - y'^2); \qquad x' = ax + y^2$$

$$y = y'; \qquad y' = y$$

$$z = z' - \frac{3}{2}x'y' + \frac{1}{2}y'^3; \quad z' = z + \frac{3}{2}axy - y^3,$$

l'ultima equazione di $F_4^{(3,2)}$ si cambia in

$$z' = \prod_1^3 {}_i (x' + \lambda_i),$$

ossia:

$$z'^2 = x'^3 + qx' + r,$$

che è l'equazione d'un cono (cilindro) cubico K_3.

Passando dalle coordinate x', y', z' alle coordinate omogenee (x', y', z', t'), l'equazione del cono K_3 diviene:

$$z'^2 t' = x'^3 + qx't'^2 + rt'^3,$$

mentre le superficie S_3 corrispondenti ai piani dello spazio (x, y, z) hanno le equazioni:

$$\alpha t'(x't' - y'^2) + \beta y't'^2 + \gamma t'^3 + \delta(2z't'^2 - 3x'y't' + y'^3) = 0,$$

ove α, β, γ, δ son costanti arbitrarie.

Tali superficie hanno nella retta $y' = t' = 0$ una retta base doppia ed ivi come piano tangente fisso il piano $t' = 0$.

In particolare, nel punto $x' = y' = t' = 0$, entrambe le falde delle S_3 hanno per piano tangente il piano $t' = 0$ (ivi hanno un punto doppio uniplanare). In tal punto, il cono K_3 è osculato dal piano $t' = 0$ (perchè la retta $x' = t' = 0$ è generatrice di flesso ed il piano stazionario ivi è il piano $t' = 0$).

Le superficie S_3 secano K_3 secondo curve C_9 di 9° ordine i cui punti base son tutti condensati nel punto $x' = y' = t' = 0$.

Per vedere la natura di tali punti, osserviamo anzitutto che le superficie S_3:

$$t'(xt' + y'^2) = 0, \quad y't'^2 = 0, \quad t'^3 = 0$$

secano K_3 secondo curve riducibili dotate nel punto $x' = y' = t'$ d'una moltiplicità > 3, mentre la

$$\Phi_3 \equiv 2z't'^2 - 3x'y't' + y'^3 = 0$$

seca K_3 secondo una curva dotata in tal punto d'un punto triplo con tutte le tangenti coincidenti nella retta $y' = t' = 0$.

Segue anzitutto che le C_9 hanno in tal punto un punto triplo, colle tangenti fisse. Inoltre esaminando la intersezione della Φ_3 con K_3 e tenendo presente che le intersezioni variabili delle C_9 debbono essere 4 *) e che le C_9 sono di genere 3, vedesi facilmente che la singolarità nel punto $x' = y' = t' = 0$ è un punto 3-plo a cui è vicino indefinitamente (nel senso di Noether) un punto 3-plo sulla direzione $y' = t' = 0$ ed a questo ancora un punto doppio ed un punto semplice (sul piano $t' = 0$).

Il sistema $|C_9|$ rappresentativo delle sezioni piane di $F_4^{(3,2)}$ non differisce dunque da quello trovato per la $F_4^{(3,1)}$ per altro che i punti base trovansi condensati. Il sistema $|C_9|$ ha una sola curva fondamentale: la retta $x' = t' = 0$, contata 3 volte.

14. Nel presente § abbiamo visto che tutte le superficie di 4° ordine rappresentabili sul cono cubico lo sono mercè trasformazioni Cremoniane (quadratiche o di 3° ordine). Le rappresentazioni di esse sul cono cubico dànno luogo al seguente teorema:

Denotando con V il vertice d'un cono cubico e con 1, 2, 3, ... *alcuni suoi punti diversi da V, e con*

$$|C_\mu| \equiv |V^r_{t,n,\dots},\ 1^\alpha,\ 2^\beta,\ \dots|_\mu$$

un sistema lineare completo di curve giacenti sul cono ed aventi in V un punto base r-plo colle tangenti fisse $t, n, \dots$, ed aventi nei punti 1, 2, ... *punti base α-pli, β-pli, ...;*

*ogni cono cubico (ellittico) su cui sia tracciato un sistema lineare (completo e semplice) di curve di grado 4 (cioè aventi 4 intersezioni variabili), può mediante una trasformazione birazionale **) ridursi ad un cono cubico su cui tal sistema sia ridotto ad uno dei seguenti tipi:*

(*a*) $|C_4| \equiv |V^1_t|_4$

(*b*) $|C_5| \equiv |V^2,\ 1^1,\ 2^1,\ 3^1|_5$

(*c*) $|C_6| \equiv |1^2,\ 2^1,\ 3^1,\ 4^1,\ 5^1|_6$

(*d*) $|C_9| \equiv |1^3,\ 2^3,\ 3^2,\ 4^1|_9$,

---

*) Per il calcolo delle intersezioni di due curve su una rigata e per le sue estensioni, veggasi la recente Nota del sig. Levi: *Dell'intersezione di due varietà contenute in una varietà semplicemente infinita di spazi* (Atti della R. Acc. di Torino, t. XXXIV, 1899).

**) Si può, con facili considerazioni, dimostrare che due coni cubici in corrispondenza algebrica biunivoca si possono dedurre l'un dall'altro mercè una trasformazione Cremoniana dello spazio. Dietro ciò, potrebbe sostituirsi nell'enunciato del presente n° la frase *trasformazione Cremoniana* al posto di *trasformazione birazionale*.

ove tra i punti V, 1, 2, ... possono sempre supporsi i legami stabiliti nei n[i] *del presente §.*

Palermo, luglio 1899.

M. DE FRANCHIS.

NOTA ADDIZIONALE.

Nel mentre correggo le bozze di stampa di questo lavoro, presentato nei primi di Agosto, prendo visione di una Nota del sig. Berry pubblicata nei *Comptes Rendus* di quest'anno nel fascicolo del 4 Settembre (t. CXXIX), dal titolo: *Sur les surfaces de quatrième degré qui admettent une intégrale de différentielle totale de première espèce,* nella quale il sig. Berry si propone, dopo aver rilevato che il risultato dei signori Poincaré e Picard relativo alle superficie di 4° ordine possedenti differenziali totali di 1ª specie è incompleto, di trovare le equazioni tipiche di tali superficie. Egli esegue la ricerca col metodo trascendente e dà anche la maniera di passare dalle superficie che egli trova ai coni cubici, con trasformazioni birazionali. Se non che, neanche il risultato del sig. Berry è esatto; difatti egli dà le equazioni delle 5 superficie che in questa nota son denotate con $F_4^{(2,1)}$, $F_4^{(1,1)}$, $F_4^{(3,1)}$, $F_4^{(1,2)}$, $F_4^{(2,2)}$ e che egli chiama (I), (II), (III), (IV), (V), ma trascura la superficie $F_4^{(3,2)}$ la cui equazione non può affatto rientrare nei tipi forniti dal sig. Berry.

Alle due equazioni tipiche delle superficie (IV) e (V) date dal sig. Berry si può sostituire l'unica (c) data da me al n° 8 del presente lavoro: quando in essa la $f_2(y, z, t)$ contiene la y al 1° od al 2° grado, si ottengono rispettivamente le due superficie.

Palermo, settembre 1899.

M. DE FRANCHIS.

SUL GRUPPO SEMPLICE DI 360 COLLINEAZIONI PIANE.

Memoria di **F. Gerbaldi**, in Palermo *).

Adunanza del 27 agosto 1899.

PARTE SECONDA.

38. — L'invariante di 6° ordine. Calcoli preliminari.

Poniamo

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_6^2 = 6\, A_1$$
$$f_1'^3 + f_2'^3 + f_3'^3 + \cdots + f_6'^3 = 6\, A_1'.$$

Queste forme di 6° ordine nelle coordinate di punti sono evidentemente, per le (10), (11), (12), invarianti assoluti per il gruppo delle 1080 sostituzioni (n° 6) che dànno luogo alle collineazioni di G_{360}. Di esse ci occorre calcolare i valori in ciascuno dei poli.

Risalendo alle formole (36) e (37) troviamo che in ogni punto U si ha

$$\theta^3 A_1 = 2(c+1), \qquad \theta^3 A_1' = 2(c'+1);$$

facendo uso delle formole (40) e (43) ricaviamo che in ogni punto P si ha

$$8\,\theta^3 A_1 = c + 6, \qquad 8\,\theta^3 A_1' = 1 + 6c';$$

mediante le (44) e (45) **) troviamo che in ogni punto P' si ha

$$\theta'^3 A_1 = -(1 + 2\omega), \qquad \theta'^3 A_1' = -(1 + 2\omega)c';$$

colle (52) e (53) otteniamo per ogni punto K

$$4\,\theta^3 A_1 = -5c^2, \qquad 4\,\theta^3 A_1' = -5c;$$

finalmente dalle (49), (50), (57), (58) deduciamo che per ogni punto V

---

*) Continuazione, vedi t. XII (1898), pp. 23-94; t. XIII (1899), pp. 161-199.

**) L'ultimo membro della (45) è errato; in sua vece bisogna scrivere:

$$\frac{1}{6}(1 - c^2)(1 + 2c)\theta'.$$

e per ogni punto H si ha

$$A_1 = 0, \qquad A'_1 = 0.$$

Per questi risultati possiamo anzitutto conchiudere che *le equazioni* $A_1 = 0$, $A'_1 = 0$ *rappresentano una stessa curva di 6° ordine, invariante per* G_{360}, *la quale passa per i 90 punti* V *e per i 72 punti* H, e che si ha identicamente

$$A_1 = c A'_1;$$

quindi, se poniamo

$$(85) \qquad A = \frac{1}{c+1} A_1, \quad \text{sarà anche} \quad A = \frac{1}{c'+1} A'_1.$$

Supporremo d'ora in poi che nelle formole (36), (37), (40), (43), (44), (45), (52), (53) il parametro θ, o θ', sia fissato in modo che per ogni punto U, P, P', K risulti $A = 1$; a questo scopo assumeremo

$\theta^3 = 2$ nelle (36) e (37),

$\theta^3 = -\frac{1}{2} c^2$ nelle (40) e (43),

$\theta'^3 = -\frac{2}{5}(1 + 2\omega)(1 + c') = \varepsilon - \omega$ nelle (44) e (45),

$\theta^3 = \frac{1}{4}(2 - 3c)$ nelle (52) e (53).

Infine per quel che riguarda i punti V ed H, nelle formole (49), (50), (57), (58) fisseremo $\theta^3 = 1$, $\theta'^3 = 1$.

Con queste convenzioni scriviamo i valori che nei varii poli di G_{360} hanno i cubi delle f e delle f'.

Posto

$$x_i = f_i^3, \qquad x'_i = f'^3_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

abbiamo nel punto $U_{(34)(56)}$

$$(86) \quad \begin{cases} x_1 = x_2 = 3c + 2, & x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = \frac{1}{2}, \\ x'_4 = x'_5 = 3c' + 2, & x'_1 = x'_2 = x'_3 = x'_6 = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

nel punto $P_{23,1}$

$$(87) \quad \begin{cases} x_1 = 3(1 - c'), \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = x_5 = x_6 = 2 - c', \\ x'_1 = x'_4 = x'_6 = \frac{1}{5}(3 - 4\omega')(1 + c'), \quad x'_2 = x'_3 = x'_5 = \frac{1}{5}(3 - 4\omega)(1 + c'); \end{cases}$$

nel punto $P'_{2'3',5'}$

$$(88) \quad \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{5}(3 - 4\omega')(1 + c), \quad x_4 = x_5 = x_6 = \frac{1}{5}(3 - 4\omega)(1 + c), \\ x'_5 = 3(1 - c), \quad x'_2 = x'_3 = 0, \quad x'_1 = x'_4 = x'_6 = 2 - c; \end{cases}$$

nel punto $V'_{(34)(56)}$

$$(89)\begin{cases} -x_1 = x_2 = 2ci(\varepsilon^2 - \omega), & -x_3 = -x_4 = x_5 = x_6 = 1, \\ x'_4 = -x'_5 = 2c'(\varepsilon - \omega), & x'_1 = x'_2 = -x'_3 = -x'_6 = i; \end{cases}$$

nel punto $K_{(23456)}$

$$(90)\begin{cases} x_1 = 5, & x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = \frac{1}{5}(6c+1), \\ x'_1 = 5, & x'_2 = x'_3 = x'_4 = x'_5 = x'_6 = \frac{1}{5}(6c'+1); \end{cases}$$

nel punto $H'_{(23456)}$

$$(91)\begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 1, & x_3 = \eta, \quad x_4 = \eta^2, \quad x_5 = \eta^3, \quad x_6 = \eta^4, \\ x'_1 = 0,\ x'_2 = -1, & x'_3 = -\eta, \quad x'_4 = -\eta^2, \quad x'_5 = -\eta^3, \quad x'_6 = -\eta^4. \end{cases}$$

39. — Gli invarianti di 12° ordine.

Introduciamo ora le forme di 12° ordine

$$(92)\qquad F = f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6, \qquad F' = f'_1 f'_2 f'_3 f'_4 f'_5 f'_6,$$

$$(93)\qquad H = 2F + 2F' - A^2,$$

i valori delle quali sono: in un punto U

$$(94)\qquad F = c^2, \qquad F' = c'^2, \qquad H = -\frac{9}{2};$$

in un punto P

$$(95)\qquad F = 0, \qquad F' = \frac{1}{2}c', \qquad H = c' - 1;$$

in un punto P'

$$(96)\qquad F = \frac{1}{2}c, \qquad F' = 0, \qquad H = c - 1;$$

in un punto V

$$(97)\qquad F = 2c, \qquad F' = -2c', \qquad H = 4(c - c');$$

in un punto K

$$(98)\qquad F = \frac{2}{5}(c' + 6), \qquad F' = \frac{2}{5}(c + 6), \qquad H = 9;$$

in un punto H

$$(99)\qquad F = 0, \qquad F' = 0, \qquad H = 0.$$

Mercè le (11), (13), (24), (26) si vede che F e F' sono due invarianti assoluti di 12° ordine per il gruppo delle 1080 sostituzioni che dànno luogo alle collineazioni di G_{360}.

Ogni curva Γ di 12° ordine, invariante per G_{360}, appartiene al fascio

determinato da $F=0$ e $F'=0$; perchè, se per un punto di Γ, diverso dai poli di G_{360}, si conduce una curva del detto fascio, essa ha in comune con Γ i 360 punti trasformati del punto preso su Γ e quindi coincide con Γ. Segue che, considerando A^2 come un invariante di 12° ordine, deve sussistere una relazione identica

$$A^2 = \alpha F + \beta F',$$

essendo α e β delle costanti. Per determinare queste si sostituiscono le coordinate di un punto P, per cui si ha: $A=1$, $F=0$, $F'=\frac{1}{2}c'$; e si deduce $\beta = 2c$; poi si sostituiscono le coordinate di un punto P', per cui si ha: $A=1$, $F=\frac{1}{2}c$, $F'=0$; e si deduce $\alpha = 2c'$. Dunque è dimostrata l'identità

$$2c'F + 2cF' = A^2. \tag{100}$$

Tra le curve invarianti di 12° grado vi è la curva $H=0$, ed il fascio costituito da tali curve può essere rappresentato dall'equazione

$$H - \lambda A^2 = 0, \tag{101}$$

donde appare che *tutte le curve del fascio considerato si toccano nei* 72 *punti* H (perchè in questi punti si annullano le forme H ed A). Siccome nel fascio stanno le curve $F=0$, $F'=0$, che sono decomposte nelle sei coniche dell'una o dell'altra sestupla involutoria, così si ritrova che ogni conica **S** è bitangente ad ogni conica **S'** (n° 9) e che i punti di contatto sono i 72 punti H. Dalle (93) e (100) risulta precisamente

$$\left\{\begin{aligned} F &= \frac{1}{15}[(4-c)H + 3(1+c)A^2], \\ F' &= \frac{1}{15}[(4-c')H + 3(1+c')A^2], \end{aligned}\right. \tag{102}$$

donde segue che le sestuple di coniche **S** ed **S'** sono rappresentate dall'equazione (101) per i valori del parametro

$$\lambda = -\frac{3(1+c)}{4-c} = c' - 1, \qquad \lambda = -\frac{3(1+c')}{4-c'} = c - 1.$$

Osserviamo che la curva hessiana della sestica $A=0$ è di 12° ordine ed è invariante per G_{360}, perciò anch'essa sta nel fascio considerato e quindi passa per i punti H; dunque *i* 72 *punti* H *sono i flessi della curva* $A=0$. Dimostreremo in seguito (106), che l'equazione della Hessiana della sestica $A=0$ è appunto

$$H = 2F + 2F' - A^2 = 0, \quad \text{ossia} \quad (1-c')F + (1-c)F' = 0.$$

Nel fascio di curve invarianti di 12° ordine ve ne è una, che contiene i 45 punti U, centri delle omologie armoniche di G_{360}; i quali sono punti doppi per la curva, e le tangenti nei medesimi sono le 90 rette r *). Tenuti presenti i valori di A, F, F', H in un punto U, l'equazione di questa curva si trova essere

(103) $2H + 9A^2 = 0$, ossia $F - c^2 A^2 = 0$, ossia $F' - c'^2 A^2 = 0$.

Nel fascio considerato vi è inoltre una curva, che contiene i 36 punti K, i quali sono punti doppi per la curva e le tangenti nei medesimi sono le 72 rette h **). Tenuti presenti i valori di A, F, F', H in un punto K, si trova che l'equazione della curva è

$$(104)\quad \begin{cases} H - 9A^2 = 0, \quad \text{ossia} \quad F - \frac{2}{5}(c' + 6)A^2 = 0, \\ \qquad \text{ossia} \quad F' - \frac{2}{5}(c + 6)A^2 = 0. \end{cases}$$

Le due sestuple di coniche involutorie S, S' si possono ritenere come due curve del fascio, che hanno l'una 60 punti doppi nei punti P e l'altra 60 punti doppi nei punti P'.

E così nel fascio delle curve invarianti di 12° ordine, oltre alla curva $A = 0$, che è da contarsi come doppia e contiene i punti V ed H, abbiamo quattro curve dotate di punti doppi, i quali sono i punti U, K, P, P' in numero di

$$45 + 36 + 60 + 60 = 201.$$

Altri punti doppi nelle curve del fascio non vi sono, perchè un fascio generale di curve di 12° ordine possiede (come è noto) $3 \times 11^2 = 363$ punti doppi, e questo numero, nel caso in cui il fascio contiene una curva

*) Per dimostrar ciò basta considerare una collineazione di 4° ordine e prendere il suo triangolo unito $U\,V'\,V''$ come triangolo coordinato col vertice (0, 0, 1) nel punto U, indi osservare che le equazioni della collineazione sono: $x_1' = i x_1$, $x_2' = -i x_2$, $x_3' = x_3$ e che ogni invariante assoluto per tale sostituzione è funzione intera di x_3, $x_1 x_2$, x_1^4, x_2^4; di qui segue pure che non vi sono curve *irreducibili* nè di 3° nè di 5° ordine invarianti per una collineazione di 4° ordine.

**) Per dimostrar ciò basta considerare una collineazione di 5° ordine e prendere il suo triangolo unito $K\,H'\,H''$ come triangolo coordinato col vertice (0, 0, 1) nel punto K, indi osservare che le equazioni della collineazione sono: $x_1' = \eta x_1$, $x_2' = \eta^4 x_2$, $x_3' = x_3$ e che ogni invariante assoluto per tale sostituzione è funzione intera di x_3, $x_1 x_2$, x_1^5, x_2^5; di qui segue pure che non vi sono curve *irreducibili* nè di 3° nè di 4° ordine trasformate in sè da una collineazione di 5° ordine.

doppia di 6° ordine, per un teorema del prof. Guccia *) è diminuito di
$$6\,[3\,(24-2+1)-6\,(4-2+1)-24]=162$$
e però nel nostro caso si riduce a $363-162=201$.

40. — *La sestica invariante e la sua hessiana.*

Dalla discussione fatta al n° 9 risulta manifesto che il gruppo G_{360} non trasforma in sè alcuna conica. Considerando una collineazione di 5° ordine, dopo le rette del triangolo unito e le coniche di un fascio, le curve irreducibili di grado più basso trasformate in sè dalla collineazione sono del 5° grado; ma una curva irriducibile del 5° grado non può essere trasformata in sè da una collineazione di 4° ordine; quindi per il gruppo G_{360} non vi sono curve irreducibili di grado inferiore al 6° che siano trasformate in sè. Non esiste poi alcuna curva di grado uguale o inferiore al 6°, che si spezzi in due o più parti e che sia invariante per il G_{360}, perchè i punti d'incontro delle varie parti formerebbero un gruppo di punti trasformato in sè dal G_{360} ed il loro numero non sarebbe in ogni caso superiore a 15, ciò che non può essere (n° 19). Dunque la sestica $A=0$ è la curva di grado più basso invariante per il gruppo G_{360} ed è irreducibile; nè ha punti multipli, perchè se ve ne fossero, formerebbero un gruppo di non più che 10 punti invariante per G_{360}; essa è quindi di 30ª classe e genere 10.

Abbiamo visto (n° 39) che i 72 punti H sono i flessi della sestica. Consideriamo un retta k ed il sottogruppo G_{10}, che la lascia inalterata (n° 20, 3°); i sei punti d'incontro di k colla sestica formano un gruppo di punti inalterato dal G_{10} e però si riducono ai due punti H (contato ciascuno tre volte) che son poli quintupli del G_{10}. Dunque *per la sestica ogni retta k è tangente d'inflessione in ciascuno dei due punti H che contiene.* Oltre alle 36 rette k, la sestica ha ancora 180 tangenti doppie, le quali, formando gruppo, passano 4 a 4 per i punti U.

Essendo senza punti multipli, la sestica ha 270 punti sestatici (in virtù della nota formola $m\,(12\,m-27)$ per $m=6$); essi formano un sistema di punti invariante per il G_{360} e però si dividono, come si capisce facilmente, in un gruppo di 90 punti, che sono i punti V, dove le tangenti sono le rette v, ed in un altro gruppo di 180 punti. La conica,

*) Teorema XLIV delle « *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, ecc.,* Memoria II » questi Rendiconti, t. IX.

che ha colla sestica contatto sipunto in un punto V, è invariata dal gruppo ciclico G_4, che lascia fermo quel punto V (n° 15), e però contiene anche il secondo punto V che è unito per quel gruppo ciclico ed ha in questo secondo punto V contatto sipunto colla sestica; di guisa che esistono 45 coniche, ciascuna delle quali ha in due punti V contatto sipunto colla sestica. Gli altri 180 punti sestatici sono quattro a quattro sulle rette u, sono cioè i punti, diversi dai punti V, in cui la sestica è tagliata dalle 45 rette u.

Trasformando la sestica colle correlazioni del gruppo esteso Γ_{720} (n° 32), si ha un'altra curva invariante per il G_{360}, la quale è di 30° ordine, 6ª classe, genere 10; per essa le 72 rette b sono tangenti cuspidali, avendosi due cuspidi in ogni punto K, ed i 90 punti V sono nuovamente punti sestatici; la curva possiede inoltre altri 180 punti sestatici ed altri 180 punti doppi, che stanno quattro a quattro sulle rette u.

Il primo membro dell'equazione della sestica è (n° 38)

$$A = A_x^6 = \frac{1}{6(c+1)} \sum^i f_i^3(x, x);$$

prendendone la seconda polare d'un punto y si ha

$$5\, A_x^4 A_y^2 = \frac{1}{6(c+1)} \sum^i [4 f_i(x, x) f_i^2(x, y) + f_i^2(x, x) f_i(y, y)].$$

Or bene, se si pone

$$u_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \qquad u_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \qquad u_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

e si chiama Θ il valor comune dei discriminanti delle forme $f_i(x, x)$, si ha:

$$f_i(x, x) f_i(y, y) - f_i^2(x, y) = \Theta \varphi_i(u, u);$$

donde moltiplicando per $f_i(x, x)$ e poi sommando per $i = 1, 2, \ldots, 6$, si deduce

$$\sum^i f_i^2(x, x) f_i(y, y) - \sum^i f_i(x, x) f_i^2(x, y) = \Theta \sum^i f_i(x, x) \varphi_i(u, u);$$

ma, in virtù della (62), il secondo membro è identicamente nullo, perchè qui è $u_x = 0$; dunque si ha

$$\sum^i f_i^2(x, x) f_i(y, y) = \sum^i f_i(x, x) f_i^2(x, y),$$

e per conseguenza

$$A_x^4 A_y^2 = \frac{1}{6(c+1)} \sum^i f_i^2(x, x) f_i(y, y); \tag{105}$$

da questa formola si deduce facilmente la notevole proprietà che *una*

conica qualunque della sestupla S, *considerata come inviluppo, è armonica alla conica polare di ogni suo punto rispetto alla sestica invariante;* la stessa proprietà hanno le coniche dell'altra sestupla.

Per formare l'hessiana di A basta ora calcolare il discriminante della forma $A_x^4 A_y^2$ considerata come forma quadratica rispetto alle variabili y. Tale discriminante si ottiene mediante la formola (17), ponendo in essa

$$\lambda_i = f_i^2(x, x),$$

donde si ricava

$$\frac{1}{6}(AA'A'')^2 A_x^4 A_x'^4 A_x''^4 = -\frac{c+1}{1350}\Theta(\lambda),$$

essendo

$$\Theta(\lambda) = \sum f_i^6 + \frac{3}{2}c'[\varepsilon(f_1^2 f_2^2 f_3^2 + \cdots + f_3^2 f_5^2 f_6^2)$$
$$+ \varepsilon^2(f_1^2 f_2^2 f_4^2 + \cdots + f_4^2 f_5^2 f_6^2)].$$

Vedremo in seguito (107) e (146) che si ha

$$\sum^i f_i^6 = 6[9F + 3(c-8)F'],$$

$$\varepsilon(f_1^2 f_2^2 f_3^2 + \cdots + f_3^2 f_5^2 f_6^2) + \varepsilon^2(f_1^2 f_2^2 f_4^2 + \cdots + f_4^2 f_5^2 f_6^2)$$
$$= -(28c + 2)F + (24c + 20)F';$$

quindi sostituendo e tenendo conto dell'identità (100), si ha

$$(106) \qquad -30(AA'A'')^2 A_x^4 A_x'^4 A_x''^4 = 2F + 2F' - A^2 = H.$$

41. — Gli invarianti A_k.

Poniamo

$$6A_k = \sum^i x_i^k = f_1^{2k} + f_2^{2k} + \cdots + f_6^{2k},$$

ed osserviamo che, qualunque sia l'intero k, sarà A_k un invariante assoluto per il gruppo di 1080 sostituzioni, che dànno luogo alle collineazioni di G_{360}; l'equazione $A_k = 0$ rappresenta una curva d'ordine $6k$ trasformata in sè da queste collineazioni. Tutte le volte che k è impari, la curva $A_k = 0$ passa per i 90 punti V, e tutte le volte che k non è multiplo di 5 la curva $A_k = 0$ passa per i 72 punti H, come risulta facilmente dalle (89) e (91).

L'invariante A_2, essendo di 12° ordine, appartiene come si è avvertito (n° 93) al fascio determinato da F e F', cioè si ha

$$A_2 = \alpha F + \beta F';$$

per calcolare i valori dei coefficienti α, β basta sostituire una volta le

coordinate d'un punto P ed un'altra volta le coordinate di un punto P'; col mezzo delle (87), (88) si calcolano i valori di A_2 che sono:

$$\text{in } P,\quad 6A_2 = 24c - 3; \qquad \text{in } P',\quad 6A_2 = 27c;$$

indi, tenute presenti le (95), (96), si ha

$$24c - 3 = 3c'\beta, \qquad 27c = 3c\alpha,$$

donde:

$$\alpha = 9,\quad \beta = 3c - 8;$$

e quindi

(107)
$$A_2 = 9F + (3c - 8)F'.$$

Consideriamo ora l'invariante A_3. La curva $A_3 = 0$ è del 18° ordine e passa per i 90 punti V e per i 72 punti H; quindi, avendo in comune questi 162 punti colla curva di 6° ordine $A = 0$, si spezza in questa curva ed in una curva invariante del 12° ordine; dunque deve essere identicamente

$$A_3 = A(\alpha F + \beta F').$$

A determinare le costanti α e β si procede come precedentemente, sostituendo un punto P ed un punto P'; dopo di aver trovato che è

$$\text{in } P,\quad 6A_3 = \frac{3}{2}(30c - 27); \text{ e in } P',\quad 6A_3 = \frac{51}{2}(3c - 2),$$

si deduce:

$$\beta = -(11c + 15), \qquad \alpha = 17(c + 1);$$

quindi si ha

(108)
$$A_3 = A[17(c + 1)F - (11c + 15)F'].$$

Passiamo ora a considerare l'invariante A_4 di 24° ordine. Osserviamo che ogni curva invariante di 24° ordine si spezza in due curve del fascio invariante di 12° ordine; infatti, se sulla curva di 24° ordine considerata si fissa un punto (diverso dai poli di G_{360}) e per esso si fa passare una curva del detto fascio, si hanno due curve dei gradi 24 e 12 con 360 punti comuni, che sono i 360 punti del gruppo cui appartiene il punto fissato. Dunque deve essere identicamente

$$A_4 = \alpha F^2 + \beta FF' + \gamma F'^2.$$

Cominciamo a calcolare i valori dei coefficienti α e γ col sostituire le coordinate d'un punto P e d'un punto P'; dopo di aver trovato che è

$$\text{in } P,\quad 6A_4 = -\frac{3}{4}(62c + 225); \text{ in } P',\quad 6A_4 = \frac{483}{2}c^2,$$

si deduce:

$$\gamma = -33c + 128, \quad \alpha = 161.$$

Per trovare poi il valore di β sostituiamo le coordinate d'un punto U; mediante le (86) si calcola A_4 e si trova:

$$\text{in } U, \quad 6A_4 = -\frac{3}{4}(77c + 659);$$

indi, tenuto conto dei valori trovati di α e γ e delle (94), si ha:

$$-\frac{1}{8}(77c + 659) = 161c^4 + \beta + (-33c + 128)c'^4,$$

donde si ricava: $\beta = 44c - 272$; dunque si ha

(109) $A_4 = 161F^2 + (44c - 272)FF' + (-33c + 128)F'^2.$

42. — Gli invarianti di 30° ordine.

Introduciamo ora due invarianti di 30° ordine, che sono le somme dei prodotti cinque a cinque delle x_i o delle x'_i e che denotiamo rispettivamente con $-G$, $-G'$; inoltre con essi consideriamo anche il seguente:

$$J = 20(cG + c'G').$$

Calcoliamone anzitutto i valori in ciascuno dei poli di G_{360}; tenute presenti le (86), ..., (91), troviamo che:

in ogni punto U si ha

(110) $G = -\frac{3}{8}(23c - 6),\quad G' = -\frac{3}{8}(23c' - 6),\quad J = \frac{2595}{8};$

in ogni punto P

(111) $G = 0,\quad G' = \frac{3}{8}(c' + 6),\qquad J = \frac{15}{8}(9 - 26c);$

in ogni punto P' si ha

(112) $G = \frac{3}{8}(c + 6),\qquad G' = 0,\qquad J = \frac{15}{8}(9 - 26c');$

in ogni punto V si ha

(113) $G = 0,\qquad G' = 0,\qquad J = 0;$

in ogni punto K si ha

(114) $G = \frac{12}{125}(-703c' + 182),\quad G' = \frac{12}{125}(-703c + 182),\quad J = -\frac{12624}{5};$

in ogni punto H si ha

(115) $G = -1,\quad G' = 1,\quad J = 20(c' - c) = 10(1 - 4c).$

Ciò premesso, osserviamo anzitutto che l'invariante G non appartiene al sistema lineare ∞^2, di 30° ordine, determinato da AF^2, AFF', AF'^2, perchè tutte le curve del sistema

$$\alpha AF^2 + \beta AFF' + \gamma AF'^2 = 0$$

passano per i punti H e la curva $G = 0$ non vi passa. Indi dimostriamo che ogni curva invariante del 30° ordine appartiene al sistema lineare ∞^3 rappresentato dall'equazione

$$G + A(\alpha F^2 + \beta F F' + \gamma F'^2) = 0;$$

infatti se Γ è una curva invariante del 30° ordine, presi su di essa tre punti (diversi dai poli di G_{360}) che appartengano a tre gruppi diversi di 360 punti, si faccia per quelli passare la curva del detto sistema lineare; questa e la curva Γ avranno in comune i $3 \times 360 = 1080$ punti dei detti tre gruppi e quindi coincideranno.

Segue che tutte le curve invarianti di 30° ordine passano per i 90 punti V, perchè in questi si annullano G ed A e quelle, che non hanno ivi punti multipli, si toccano ivi, essendo tangenti le 90 rette v. Segue inoltre che tra le forme G, G', A, F, F' deve aver luogo una relazione

$$G' + \delta G + A(\alpha F^2 + \beta F F' + \gamma F'^2) = 0.$$

A determinare i coefficienti α, β, γ, δ si sostituisce un punto H, per cui si ha: $A = 0$, $G = -1$, $G' = 1$; si deduce $\delta = 1$. Indi si sostituisce un punto P, per cui si ha

$$A = 1, \quad F = 0, \quad F' = \frac{1}{2} c', \quad G = 0, \quad G' = \frac{3}{8}(c' + 6);$$

si ricava $\gamma = 6(c' + 1)$. Si sostituisce ancora un punto P', per cui è

$$A = 1, \quad F = \frac{1}{2} c, \quad F' = 0, \quad G = \frac{3}{8}(c + 6), \quad G' = 0;$$

si ricava $\alpha = 6(c + 1)$. Finalmente si sostituisce un punto V, per cui è

$$A = 1, \quad F = c^2, \quad F' = c'^2, \quad G + G' = \frac{3}{16}$$

e, tenuto conto dei valori trovati per α, γ, δ, si ottiene

$$\frac{3}{16} + 6(c + 1)c^4 + \beta + 6(c' + 1)c'^4 = 0;$$

donde si ricava $\beta = -18$. Dunque la relazione cercata tra G, G', A, F, F' è

$$(116) \quad G + G' + 6A[(c + 1)F^2 - 3FF' + (c' + 1)F'^2] = 0.$$

Sostituendo ad F, F' le loro espressioni (102) mediante A e H, si ottiene la seguente relazione tra G, G', A, H:

$$(117) \qquad G + G' + \frac{1}{20}(H^2 - 6HA^2 - 51A^4)A = 0.$$

Quindi gli invarianti G, G' si possono esprimere mediante A, H, J come segue

$$(118)\begin{cases} G = \frac{1}{150}[2(c'-c)J + (c'-4)(H^2 - 6HA^2 - 51A^4)A], \\ G' = \frac{1}{150}[2(c-c')J + (c-4)(H^2 - 6HA^2 - 51A^4)A]. \end{cases}$$

43. — *Il problema delle forme per il gruppo* G_{1080}.

Consideriamo i due fasci di curve

$$(119)\qquad H - \lambda A^2 = 0, \qquad J - \mu A^5 = 0,$$

l'uno del 12°, l'altro del 30° ordine, il primo dei quali fu studiato al n° 39. Le curve di questi due fasci sono ognuna trasformata in sè dal gruppo di collineazioni G_{360}; quindi i $12 \times 30 = 360$ punti, in cui si tagliano due curve generiche l'una dell'uno e l'altra dell'altro fascio, formano un gruppo di punti per il G_{360} (n° 19). Inversamente è pur chiaro che ogni gruppo di punti per il G_{360} è l'intersezione di due curve dei detti fasci, ad eccezione però dei gruppi che sono situati sulla sestica $A = 0$, la quale (contata ora due, ora cinque volte) appartiene ad entrambi i fasci.

Un gruppo speciale di punti, situato sulla curva $A = 0$, si può considerare ottenuto come intersezione di questa con una curva del fascio di 60° ordine

$$(120)\qquad J^2 - \theta H^5 = 0.$$

In tal modo ad un gruppo generico di punti corrisponde una coppia di valori *finiti* dei parametri λ e μ e ad un gruppo di punti sulla curva $A = 0$ un valore del parametro θ; possiamo anche ritenere che un gruppo di punti sulla curva $A = 0$ corrisponda ad una coppia di valori *infiniti* per i parametri λ e μ con un valore assegnato θ come limite del rapporto $\frac{\mu^2}{\lambda^5}$.

In particolare (n^i 39 e 42) si ha:

per i punti U: $\lambda = -\frac{9}{2}$, $\mu = \frac{2595}{8}$;

per i punti P: $\lambda = c' - 1$, $\mu = \frac{15}{8}(9 - 26c)$;

per i punti P': $\lambda = c - 1$, $\mu = \frac{15}{8}(9 - 26c')$;

per i punti K: $\lambda = 9$, $\mu = -\frac{12624}{5}$;

per i punti V: $\theta = 0$;

per i punti H: $\theta = \infty$.

Dati i parametri λ, μ d'un gruppo generico di punti, o il parametro ϑ di un gruppo speciale, la ricerca dei singoli punti del gruppo conduce evidentemente ad un'equazione di grado 360.

A questo problema si riconduce l'altro: assegnati i valori degli invarianti assoluti A, H, J, trovare i valori delle variabili x_1, x_2, x_3, o, più generalmente, trovare i valori d'una forma assegnata quale si voglia $\pi(x_1, x_2, x_3)$. Eliminando le tre variabili x_1, x_2, x_3 dalle quattro equazioni

$$A(x_1, x_2, x_3) = A, \quad H(x_1, x_2, x_3) = H, \quad J(x_1, x_2, x_3) = J, \quad \pi(x_1, x_2, x_3) = \pi,$$

si ha una equazione di grado $6 \times 12 \times 30 = 6 \times 360$ in π, i coefficienti della quale sono funzioni razionali intere di A, H, J, essendo posto $= 1$ il coefficiente della potenza più elevata.

Le forme A, H, J essendo di grado pari restano inalterate quando si cambiano di segno le x_1, x_2, x_3; perciò, se il gruppo G_{1080} di sostituzioni, che dànno luogo alle collineazioni di G_{360}, si estende colla sostituzione

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3,$$

si ha un gruppo G_{2160} di sostituzioni, per le quali A, H, J sono invarianti assoluti. L'equazione suddetta di grado 6×360 in π dà i 2160 valori che assume la forma π corrispondentemente alle sostituzioni del gruppo G_{2160}. Il grado della equazione in π si abbassa a $\dfrac{2160}{n}$, quando π appartiene ad un sottogruppo di G_{2160} dell'ordine n. Quando il grado di π è multiplo di 6, la π appartiene al sottogruppo di 6° ordine

$$x'_1 = (-\varepsilon)^\lambda x_1, \quad x'_2 = (-\varepsilon)^\lambda x_2, \quad x'_3 = (-\varepsilon)^\lambda x_3 \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

(di cui le sostituzioni dànno la collineazione identica), e allora il grado della equazione in π è 360. Di qui segue che, quando il grado di π non è multiplo di 6, l'equazione in π si abbassa al grado 360 colla trasformazione $\pi' = \pi^\alpha$, essendo $\alpha = 6$, oppure 3, oppure 2, secondochè il grado di π è primo con 6, oppure multiplo di 2, oppure multiplo di 3. Se poi π è un invariante di grado pari di G_{1080}, allora π appartiene al gruppo G_{2160} stesso ed il grado dell'equazione in π si abbassa al primo; cioè *ogni invariante di ordine pari del gruppo G_{1080} è funzione razionale, intera, dei tre invarianti A, H, J.*

Denotando con Δ l'invariante d'ordine dispari minimo per il gruppo G_{1080}, *qualunque altro invariante d'ordine dispari è uguale a Δ moltiplicato per una funzione razionale intera di A, H, J.*

Infatti se L è un invariante d'ordine dispari, saranno $L\Delta$ e Δ^2 in-

varianti d'ordine pari; quindi si avrà

$$L\Delta = \psi_1(A, H, J), \quad \Delta^2 = \psi_2(A, H, J),$$

essendo ψ_1 e ψ_2 simboli di funzioni razionali intere; inoltre dall'essere Δ invariante d'ordine dispari *minimo* segue che la ψ_2 è funzione intera *irreducibile* delle tre variabili A, H, J; quindi, siccome ψ_1 si annulla per tutti i sistemi di valori delle A, H, J per i quali si annulla ψ_2, sarà ψ_1 esattamente divisibile per ψ_2, e, denotando con $\psi(A, H, J)$ la funzione intera loro quoziente, si avrà

$$L = \psi(A, H, J)\Delta.$$

La forma d'ordine 45, che uguagliata a zero rappresenta le 45 rette u, è l'invariante d'ordine dispari minimo; altrimenti una parte delle 45 rette darebbe luogo ad un invariante, ciò che non può essere, perchè con collineazioni del G_{360} si può portare ciascuna retta u in ciascun'altra (n° 11).

D'altra parte la forma Jacobiana delle tre A, H, J è un invariante per il G_{1080} d'ordine 45. *Dunque come invariante d'ordine dispari minimo si può assumere*

$$(121) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_1} & \frac{\partial A}{\partial x_2} & \frac{\partial A}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_3} \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} & \frac{\partial J}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

e questo uguagliato a zero dà l'equazione delle 45 rette u.

Troveremo in seguito la funzione razionale intera in A, H, J che serve ad esprimere Δ^2; per ora ricordiamo che ogni retta u è corda comune a due coppie di coniche d'una sestupla involutoria (n° 11) e che le sei corde comuni alle coniche (i) e (k) sono rappresentate (n° 12) dall'equazione: $f_i^3 - f_k^3 = 0$; indi accoppiamo in tutti i modi le coniche della sestupla Σ ed ogni volta prendiamo le sei corde; ciascuna retta u verrà ad essere contata due volte, e quindi concludiamo

$$(122) \qquad \Delta^2 = a\prod_{i,k}(f_i^3 - f_k^3),$$

dove Π è simbolo di prodotto esteso a tutte le 15 combinazioni binarie ik, ed a è un coefficiente numerico.

Concludiamo infine che gli invarianti fondamentali del gruppo G_{1080} sono A, H, J, Δ dei gradi 6, 12, 30, 45, legati tra loro da un'equazione di 2° grado in Δ.

44. — Risolventi di 6° grado per il problema delle forme del gruppo G_{1080} *).

Abbiamo visto (n° 26) che nel gruppo G_{360} si hanno due sistemi ciascuno di sei sottogruppi simili icosaedrici.

Nel gruppo icosaedrico G_{60} di sostituzioni, generato dalle S e Z, si possono assumere come invarianti fondamentali degli ordini 2, 6, 10 i seguenti

$$f_1, \quad A, \quad f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 = B_1;$$

si ha inoltre un invariante di ordine 15, che qui non importa considerare.

Ogni gruppo di 360 punti trasformato in sè dal G_{360} si divide in sei gruppi di 60 punti ciascuno, dei quali l'uno è trasformato in sè dal G_{60} considerato, e gli altri cinque sono trasformati in sè dagli altri cinque gruppi icosaedrici simili al detto G_{60}.

Ogni gruppo poi di 60 punti trasformato in sè dal G_{60} è (se non giace sulla conica $f_1 = 0$) l'intersezione di due curve, l'una di 6° e l'altra di 10° ordine, prese dai fasci che hanno per equazioni:

$$f_1^3 - x A = 0, \qquad f_1^5 - y B_1 = 0.$$

Un gruppo di punti, giacente sulla conica $f_1 = 0$, si dà come intersezione di questa conica con una curva del fascio di 30° ordine

$$J - z A^5 = 0.$$

Gli invarianti del G_{60} di grado più basso, che per le sostituzioni del gruppo G_{1080} assumono soltanto sei valori, sono

$$a f_1^3 + b A,$$

dove a, b denotano due costanti arbitrarie; quindi la più semplice risolvente di 6° grado nel problema delle forme del gruppo G_{1080} è quella

*) Le risolventi di 6° grado del problema delle forme relative al gruppo G_{1080} furono comunicate nel 1897 al Congresso di Zurigo (v. *Verhandlungen des ersten intern. Mathem.-Kongr.*, pp. 242-246; v. anche *Mathematische Annalen*, Bd. L.). Le differenze tra le formole d'allora e quelle di adesso sono dovute ad avere scelto per incognite allora $\frac{f_i^3}{c+1}$ e $\frac{f_i'^3}{c'+1}$ ed ora f_i^3 e $f_i'^3$ e nel tempo stesso ad avere assunto allora, come invarianti fondamentali degli ordini 12, 30, Φ e Ψ invece degli H e J di adesso, essendo: $\Phi = 2c' F$, $\Psi = \frac{G}{(c+1)^5}$.

che ha per radici le

$$f_i^3 = x_i \qquad (i = 1, \ldots, 6)$$

Nota che sia una radice x_1 di questa risolvente, il problema delle forme del gruppo G_{1080} si riduce al problema delle forme del gruppo icosaedrico G_{60}, perchè allora si conoscono i parametri x, y di questo ultimo:

$$x = \frac{x_1}{A}, \quad y = \frac{f_1^6}{Bf_1} = \frac{x_1^2}{F},$$

essendo F espresso mediante A e H dalla (102).

Possiamo facilmente costruire questa risolvente di 6° grado, perchè abbiamo già calcolato (n° 41) in funzione degli invarianti fondamentali del G_{1080} le somme di potenze

$$s_k = \sum^i x_i^k = 6\,A_k \quad \text{per} \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Sia

$$x_i^6 - a_1 x_i^5 + a_2 x_i^4 - a_3 x_i^3 + a_4 x_i^2 - a_5 x_i + a_6 = 0$$

la detta risolvente. Applichiamo le note formole

$$a_1 = s_1, \qquad 2\,a_2 = s_1^2 - s_2, \qquad 6\,a_3 = -s_1^3 + 3\,s_1 s_2 - 2\,s_3,$$
$$24\,a_4 = s_1^4 - 6\,s_1^2 s_2 + 8\,s_1 s_3 + 3\,s_2^2 - 6\,s_4,$$

e sostituiamo ad $s_k = 6\,A_k$ le espressioni (85), (107), (108), (109); troviamo:

$$(123)\quad \begin{cases} a_1 = 6\,(c+1)A, \\ a_2 = 63\,F + 6\,(6\,c - 11)F', \\ a_3 = (c+1)A[53\,F + \frac{1}{5}(196\,c - 314)F'], \\ a_4 = 63\,F^2 + 6\,(18\,c - 29)F\,F' + 3\,(-38\,c + 23)F'^2; \end{cases}$$

inoltre abbiamo

$$-a_5 = G, \qquad a_6 = F^3.$$

In virtù della (102) possiamo esprimere a_2, a_3, a_4 mediante H ed A; abbiamo

$$(124)\quad \begin{cases} a_2 = (c-1)H + 33\,c A^2, \\ a_3 = \frac{1}{5}A[(4\,c - 31)H + (228\,c - 157)A^2], \\ a_4 = -\frac{1}{20}[(4c+3)H^2 + 6(16c+17)HA^2 - 3(68c - 169)A^4]. \end{cases}$$

Quindi, per un gruppo di punti non situato sulla curva $A = 0$, posto $x_i = A\,x$, e tenute presenti le (119), la risolvente di 6° grado considerata è definitivamente

$$(125)\quad \begin{cases} x^6 - 6(c+1)x^5 + [(c-1)\lambda + 33c]x^4 \\ -\frac{1}{5}[(4c-31)\lambda + (228c-157)]x^3 \\ -\frac{1}{20}[(4c+3)\lambda^2 + 6(16c+17)\lambda - 3(68c-169)]x^2 \\ +\frac{1}{150}[(1-4c)\mu + (c'-4)(\lambda^2 - 6\lambda - 51)]x \\ +\frac{1}{3375}[(4-c)\lambda + 3(c+1)]^3 = 0. \end{cases}$$

Per un gruppo speciale di punti situato sulla curva $A = 0$ pongasi invece: $x_i = \sqrt{\frac{H}{4(c-c')}}\,x = \frac{\sqrt{H}}{(1+i)\sqrt[4]{15}}\,x$; allora, tenuta presente la (120), si deduce la risolvente speciale

$$(126)\quad x^6 - 6(1+c)x^4 + 3(4c+3)x^2 - 6\sqrt{\frac{\theta}{c-c'}}\,x - 2(3c+2) = 0,$$

che si può scrivere

$$(x^2-1)^2(x^2+8c^3) - 6\sqrt{\frac{\theta}{c-c'}}\,x = 0.$$

Nei punti V si ha $\theta = 0$ (n° 43), $(x_i = x)$, e l'equazione è verificata dai valori x_i dati dalle (89).

Se nelle equazioni (125) e (126) si cambia c in c' e c' in c, se inoltre nella (126) si cambia x in $x\sqrt{-1}$, si ottengono altre due equazioni, che indicheremo con (125') e (126'). Esse sono ancora due risolventi del problema delle forme per il gruppo G_{1080}; le radici sono per la (125'): $x = \frac{x'_i}{A}$; e per la (126'): $x = (1+i)\frac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt{H}}x'_i$, essendo $x'_i = f'^3_i$. A questo risultato si giunge considerando l'altra sestupla di sottogruppi icosaedrici, che abbiamo denotato con G'_{60} (n° 26), e ripetendo gli sviluppi fatti sopra e basati sulla considerazione dei sottogruppi G_{60} della prima sestupla *).

*) Siccome le (126), (126') non si alterano cambiando ad un tempo $\sqrt{\theta}$ in $-\sqrt{\theta}$ ed x in $-x$, così le 6 radici, che si hanno per una determinazione di $\sqrt{\theta}$, sono uguali e opposte di segno alle sei radici che si hanno per l'altra determinazione; ciò dipende dal fattore $\sqrt{H}$ della sostituzione che si è fatto, per cui ad ogni valore della f_i^3 e della f'^3_i, corrispondono due valori uguali e opposti della x.

Il gruppo di sostituzioni G_{1080} produce, sia nelle f_i^3, sia nelle $f_i'^3$, le 360 permutazioni del gruppo alternante; perciò il gruppo di Galois per le equazioni (125), (126), (125'), (126') è il gruppo alternante. Ciò è d'accordo col fatto che la radice quadrata del discriminante è funzione razionale dei parametri λ, μ nelle equazioni (125) e (125') e del parametro $\sqrt{\theta}$ nelle equazioni (126), (126'). Invero nella equazione (125) il discriminante è (n° 53)

$$\frac{1}{A^{30}}\prod_{i,k}(f_i^3 - f_k^3)^2 = \frac{1}{a^2}\frac{\Delta^4}{A^{30}},$$

inoltre Δ^2 è funzione razionale di A, H, J; quindi $\frac{\Delta^2}{A^{15}}$ è funzione razionale di λ e μ. Nella (126) poi il discriminante è

$$\left[\frac{4(c-c')}{H}\right]^{15}\prod_{i,k}(f_i^3 - f_k^3)^2 = \frac{(4c-4c')^{15}}{a^2}\frac{\Delta^4}{H^{15}},$$

inoltre, essendo $A = 0$, Δ^2 è funzione razionale di H, J e quindi $\frac{\Delta^2}{\sqrt{H^{15}}}$ è funzione razionale di $\sqrt{\theta}$.

45. — *Dalle risolventi di 6° grado al problema delle forme del G_{1080}.*

Risoluta che sia la (125) o (126), delle sei radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ se ne prendano quattro qualunque $\alpha_r, \alpha_s, \alpha_t, \alpha_u$ in ordine arbitrario, ciò che si può fare in $6.5.4.3 = 360$ modi; segue

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = \sqrt[3]{\alpha_r} : \sqrt[3]{\alpha_s} : \sqrt[3]{\alpha_t} : \sqrt[3]{\alpha_u}.$$

Delle 27 soluzioni che si hanno in causa dei tre valori della radice cubica di ciascuna delle quantità $\alpha_r, \alpha_s, \alpha_t, \alpha_u$, si deve evidentemente scegliere quella (unica) che soddisfa alla relazione (72) che abbiamo visto (n° 30) intercedere tra i valori delle f_1, f_2, f_3, f_4.

In questo modo si trovano tutti i 360 sistemi di valori per i rapporti $f_1 : f_2 : f_3 : f_4$; fissato uno di questi sistemi, restano in conseguenza individuati i rapporti $f_k : f_5 : f_6$; a questo scopo servono le equazioni (63), le quali, come abbiam visto al n° 30, sussistono tra le sei quantità f_i; basta ad esempio considerare tre delle prime quattro equazioni (63) come equazioni di primo grado rispetto alle tre quantità $f_5, f_6, f_5 f_6$.

In modo analogo si procede per determinare i 360 sistemi di valori dei rapporti delle f_i', dopo che sia risoluta l'equazione (125') o la (126').

Basta conoscere uno dei sistemi di valori dei rapporti delle f_i o delle f'_i per dedurre facilmente tutti gli altri applicando le sostituzioni del gruppo e le formole (10) — (13) ovvero le formole (23) — (26).

Dopo di ciò, possiamo dire (n° 29) che sono determinati, mediante le 6 coordinate omogenee f, i 360 punti del gruppo dato dai parametri λ e μ, se è generico, o dal parametro θ, se è speciale.

Volendo poi di ogni punto del gruppo le tre coordinate proiettive, bisognerà anzitutto fissare il triangolo coordinato ed il punto unità. Scegliamo, come abbiam fatto al n° 5, per triangolo coordinato il triangolo unito della collineazione S, cioè quello che ha i vertici nei punti $P_{23,1}$, $P_{31,2}$, $P_{12,3}$ e per punto unità il punto $P_{56,4}$ *). Allora delle sei coordinate omogenee f_i di un punto si deducono razionalmente le tre coordinate proiettive x, y, z col mezzo delle (9), dalle quali si ha

$$x : y : z = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3}, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

avendo posto per brevità:

$$(127)\quad \begin{cases} \alpha_{11} = 3cf_1 - (c+2)(\varepsilon^2 f_4 + f_5 + \varepsilon^2 f_6), \\ \alpha_{22} = 3c\varepsilon^2 f_2 - (c+2)(\varepsilon^2 f_4 + \varepsilon f_5 + \varepsilon f_6), \\ \alpha_{33} = 3cf_3 - (c+2)(\varepsilon^2 f_4 + \varepsilon^2 f_5 + f_6), \\ \alpha_{23} = \alpha_{32} = 3f_1 + (1-c)(\varepsilon^2 f_4 + f_5 + \varepsilon^2 f_6), \\ \alpha_{31} = \alpha_{13} = 3\varepsilon^2 f_2 + (1-c)(\varepsilon^2 f_4 + \varepsilon f_5 + \varepsilon f_6), \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = 3f_3 + (1-c)(\varepsilon^2 f_4 + \varepsilon^2 f_5 + f_6). \end{cases}$$

Da quanto precede si vede che, dati i valori A_0, H_0, J_0, Δ_0 degli invarianti fondamentali del gruppo G_{1080}, la ricerca dei sistemi corrispondenti di valori delle variabili x, y, z, cioè la *risoluzione del problema delle forme* per il gruppo G_{1080}, si può fare colle seguenti operazioni:

1° Si risolve un'equazione di 6° grado, che è la (125), se $A_0 \neq 0$, con $\lambda = \dfrac{H_0}{A_0^2}$, $\mu = \dfrac{J_0}{A_0^5}$, è invece la (126), se $A_0 = 0$, con $\sqrt{\theta} = \dfrac{J_0}{\sqrt{H_0^5}}$;

2° Si estrae la radice cubica da quattro radici della detta equazione e si fissa uno qualunque dei 360 sistemi di valori proporzionali alle f_i nel modo sopra indicato, coll'aiuto delle equazioni (72) e (63);

3° Si pone: $x = r\alpha_{k1}$, $y = r\alpha_{k2}$, $z = r\alpha_{k3}$, essendo α_{k1}, α_{k2}, α_{k3} i

*) Dalle (8) si vede che nel punto unità si ha:

$$\frac{\varepsilon^2}{f_1} = \frac{1}{f_2} = \frac{\varepsilon^2}{f_3} = \frac{c-1}{f_4} = \frac{0}{f_5} = \frac{0}{f_6};$$

queste equazioni poi si ottengono trasformando le (40) colla sostituzione OT^2Z^3, che porta il punto $P_{23,1}$ nel punto $P_{56,4}$.

valori che prendono, per il suddetto sistema di valori proporzionali alle f_i, ben determinate funzioni lineari ed omogenee delle f_i, le quali in particolare sono le (127), se il sistema coordinato è quello del n° 5. Resta a calcolare r;

4° Si calcolano i valori A_1, H_1, J_1, Δ_1 degli invarianti fondamentali per i valori α_{k1}, α_{k2}, α_{k3} delle variabili, e si dovrà avere

$$r^6 A_1 = A_0, \quad r^{12} H_1 = H_0, \quad r^{30} J_1 = J_0, \quad r^{45} \Delta_1 = \Delta_0,$$

donde si ricava r, in generale, con un'estrazione di radice cubica

$$r = \sqrt[3]{\frac{\Delta_0 A_1^7}{\Delta_1 A_0^7}} = \sqrt[3]{\frac{\Delta_0 H_1 J_1}{\Delta_1 H_0 J_0}};$$

per eccezione, per calcolare r occorre un'estrazione di radice sesta

$$r = \sqrt[6]{\frac{A_0}{A_1}} = \sqrt[6]{\frac{J_0 H_1^2}{J_1 H_0^2}},$$

quando $\Delta_0 = 0$ e $J_0 \neq 0$, quando cioè si tratta di un gruppo di 180 punti sulle rette u, ovvero dei gruppi di punti U, P, P', K; occorre poi una estrazione di radice dodicesima

$$r = \sqrt[12]{\frac{H_0}{H_1}}$$

quando $\Delta_0 = 0$, $J_0 = 0$, $A_0 = 0$, quando cioè si tratta del gruppo dei 90 punti V; occorre finalmente un'estrazione di radice quindicesima

$$r = \sqrt[15]{\frac{J_1 \Delta_0}{J_0 \Delta_1}}$$

quando $A_0 = 0$, $H_0 = 0$, quando cioè si tratta del gruppo dei 72 punti H.

46. — *Relazioni tra le risolventi di 6° grado.*

Denotiamo ora con α_∞, α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 le sei radici della equazione (125) o (126) e con α'_∞, α'_0, α'_1, α'_2, α'_3, α'_4 le sei radici della (125') o (126'). Si scelgano, come si è visto sopra, le determinazioni delle radici cubiche $\sqrt[3]{\alpha_\infty}$, $\sqrt[3]{\alpha_0}$, $\sqrt[3]{\alpha_1}$, $\sqrt[3]{\alpha_2}$, $\sqrt[3]{\alpha_3}$, $\sqrt[3]{\alpha_4}$ in guisa che queste siano ordinatamente proporzionali ad un sistema di valori delle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6; si avrà, in virtù delle (22):

$$(128) \quad \sqrt[3]{\alpha'_k} = \frac{1}{2(c-1)}\left[\sqrt[3]{\alpha_\infty} + \sqrt[3]{\alpha_0} + \sqrt[3]{\alpha_1} + \sqrt[3]{\alpha_2} + \sqrt[3]{\alpha_3} + \sqrt[3]{\alpha_4}\right].$$

Osservando che tale uguaglianza sussiste per $3 \times 360 = 1080$ scelte

di determinazioni di radici cubiche nel secondo membro, mentre il primo membro è suscettibile di $3 \times 6 = 18$ valori, si può concludere che *una radice cubica d'una radice qualunque dell'equazione* (125') *o* (126') *è, a meno del divisore* $2(c-1)$, *uguale ad uno dei valori della somma delle radici cubiche delle sei radici della* (125) *o* (126), *e la scelta opportuna delle determinazioni delle radici cubiche si può fare in* 60 *modi diversi.*

Convenendo poi che sia

$$\alpha_m = \alpha_n \qquad \text{quando} \qquad m \equiv n \qquad (\text{mod. } 5),$$

segue ancora dalle (22) che le 5 espressioni

$$(128) \quad \frac{1}{2(c-1)}\left[\sqrt[3]{\alpha_\infty} + \sqrt[3]{\alpha_n} + \varepsilon\left(\sqrt[3]{\alpha_{n+1}} + \sqrt[3]{\alpha_{n+4}}\right) + \varepsilon^2\left(\sqrt[3]{\alpha_{n+2}} + \sqrt[3]{\alpha_{n+3}}\right)\right]$$

per $n = 0, 1, 2, 3, 4$, insieme alla (128), dànno radici cubiche delle sei radici dell'equazione (125') o (126') prese in un certo ordine, che varia al variare della scelta iniziale delle radici cubiche delle α.

Similmente, fatta una scelta di radici cubiche delle α' in modo che siano $\sqrt[3]{\alpha'_\infty}, \sqrt[3]{\alpha'_0}, \ldots, \sqrt[3]{\alpha'_4}$ ordinatamente proporzionali ad un sistema di valori delle $f'_1, f'_2, \ldots, f'_6$, le sei espressioni

$$(128') \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2(c'-1)}\left[\sqrt[3]{\alpha'_\infty} + \sqrt[3]{\alpha'_0} + \sqrt[3]{\alpha'_1} + \sqrt[3]{\alpha'_2} + \sqrt[3]{\alpha'_3} + \sqrt[3]{\alpha'_4}\right] \\ \dfrac{1}{2(c'-1)}\left[\sqrt[3]{\alpha'_\infty} + \sqrt[3]{\alpha'_n} + \varepsilon\left(\sqrt[3]{\alpha'_{n+2}} + \sqrt[3]{\alpha'_{n+3}}\right) + \varepsilon^2\left(\sqrt[3]{\alpha'_{n+1}} + \sqrt[3]{\alpha'_{n+4}}\right)\right] \end{cases}$$

per $n = 0, 1, 2, 3, 4$ dànno in un certo ordine radici cubiche delle sei radici α dell'equazione (125) o (126).

Le relazioni (128), (128') sono notevoli per la loro semplicità; ma hanno forma irrazionale. Quando si conoscono le radici di una risolvente di 6° grado, quelle dell'altra si possono calcolare razionalmente. A questo scopo si consideri la funzione

$$\begin{aligned} y_1 = {} & x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_4x_5 + x_1x_5x_6 + x_1x_6x_2 \\ & + x_2x_3x_5 + x_3x_4x_6 + x_4x_5x_2 + x_5x_6x_3 + x_6x_2x_4 \\ & - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_5 - x_1x_4x_6 - x_1x_5x_2 - x_1x_6x_3 \\ & - x_2x_3x_4 - x_3x_4x_5 - x_4x_5x_6 - x_5x_6x_2 - x_6x_2x_3, \end{aligned}$$

la quale, come è noto, prende sei valori quando sulle variabili x_i si fanno le permutazioni del gruppo alternante. Questa funzione, se si sostituisce $x_i = f_i^3$, diventa un invariante di grado 18 per quel gruppo icosaedrico di collineazioni, che è generato dalle Z e $T^2 S$ e che lascia ferma la conica (1') (cfr. nⁱ 26 e 36). Per tal gruppo icosaedrico si possono assu-

mere come invarianti fondamentali di ordine pari (n° 44)

$$f_1, \quad A, \quad B'_1 = f'_2 f'_3 f'_4 f'_5 f'_6;$$

mediante questi si può quindi esprimere y_1 ed in tale espressione compariranno i termini seguenti

$$f_1'^9, \quad A f_1'^6, \quad B'_1 f_1'^4 = F' f_1'^3, \quad A^2 f_1'^3, \quad B'_1 A f'_1 = F' A, \quad A^3;$$

sostituendo ad F' la (102), si avrà

$$y_1 = \alpha x_1'^3 + \beta A x_1'^2 + (\gamma H + \delta A^2) x'_1 + \theta H A + \zeta A^3,$$

dove α, β, γ, δ, θ, ζ sono coefficienti numerici da determinare. A questo scopo sostituiremo alcuni dei poli di G_{360}, tenendo presenti le (86) — (91).

Per il punto $H'_{(31456)} = T H'_{(23456)}$ si ha:

$$A = 0, \quad H = 0, \quad x'_1 = -\eta^4, \quad y_1 = 4\eta + 2\eta^2 + 4\eta^3;$$

si deduce

$$\alpha = -2\sqrt{5}.$$

Per il punto $V_{(34)(56)}$ si ha:

$$A = 0, \quad H = 2(4c - 1), \quad x'_1 = i, \quad y_1 = \frac{16\sqrt{5}}{5}(3c - 2)i;$$

$$\frac{16\sqrt{5}}{5}(3c - 2) = -\alpha + 2(4c - 1)\gamma;$$

si ricava

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}(4c + 5).$$

Per il punto $K_{(23456)}$ si ha:

$$A = 1, \quad H = 9, \quad x'_1 = 5, \quad y_1 = 0;$$

(I) $$125\alpha + 25\beta + 45\gamma + 5\delta + 9\theta + \zeta = 0.$$

Per il punto $K_{(31456)} = T K_{(23456)}$ si ha:

$$A = 1, \quad H = 9, \quad x'_1 = \frac{1}{5}(6c' + 1), \quad y_1 = 0;$$

(II) $$(18c - 52)\alpha - (30c + 20)\beta - (270c - 180)\gamma - (30c - 20)\delta + 225\theta + 25\zeta = 0.$$

Per il punto $U_{(34)(56)}$ si ha:

$$A = 1, \quad H = -\frac{9}{2}, \quad x'_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = 0;$$

(III) $$\alpha + 2\beta - 18\gamma + 4\delta - 36\theta + 8\zeta = 0.$$

Per il punto $U_{(24)(56)} = S Z U_{(34)(56)}$ si ha:

$$A = 1, \quad H = -\frac{9}{2}, \quad x'_1 = 3c' + 2, \quad y_1 = 0;$$

(IV) $$(342c + 305)\alpha + (132c - 26)\beta - (108c - 42)\gamma + (24c - 28)\delta + 36\theta - 8\zeta = 0.$$

Ora se nelle (I), (II), (III), (IV) si sostituiscono ad α e γ i valori sopra trovati, si ottengono quattro equazioni colle incognite β, δ, θ, ζ, che risolute dànno:

$$\beta = \frac{6\sqrt{5}}{5}(11 - 4c), \qquad \delta = \frac{3\sqrt{5}}{5}(32c - 39),$$

$$\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}(2c + 7), \qquad \zeta = \frac{\sqrt{5}}{5}(23 - 42c) \text{ *)}.$$

Concludiamo adunque che si ha per le risolventi generali ($A \neq 0$):

$$(129) \qquad \begin{aligned} \sqrt{5}\,y = &-2x^3 + 6(11 - 4c)x^2 + [(4c + 5)\lambda + 3(32c - 39)]x \\ &- (2c + 7)\lambda + (23 - 42c), \end{aligned}$$

dove y è uno qualunque dei sei valori che prende la funzione y_1, se al posto delle x_i si sostituiscono le radici della risolvente di 6° grado (125) ed x è una delle radici dell'altra risolvente (125′). Quindi, se è stata risoluta la (125), per avere le radici della (125′) basta per ogni valore di y trovare la radice comune alle equazioni (125′) e (129); ciò che si fa razionalmente.

Nel caso delle risolventi speciali ($A = 0$), alla (129) bisogna sostituire l'equazione

$$(129^{\text{bis}}) \qquad \sqrt{5}\,y = -2x^3 + 6(8c - 7)x,$$

dove y è uno dei valori che prende la funzione y_1, se al posto delle x_i si sostituiscono le radici della risolvente speciale (126); si tratta allora di trovare la radice comune alle equazioni (129^{bis}) e (126′).

47. — *Risolventi particolari di 6° grado.*

Oltre alle risolventi speciali (126), (126′) corrispondenti a gruppi di punti situati sulla sestica $A = 0$, sono notevoli altre risolventi particolari corrispondenti a gruppi di punti situati su quelle curve invarianti di 12° ordine, che sono dotate di punti doppi (n° 39).

Per un gruppo di punti situato su una sestupla di coniche, ad es. la S', si ha $\lambda = c - 1$; per questo valore di λ la (125) si può scrivere

*) Per il punto $P'_{1,6,4,5} = OP'_{2,3,4,5}$ si ha:

$$A = 1, \qquad H = c - 1, \qquad x'_1 = 0, \qquad y_1 = -\frac{16\sqrt{5}}{5}(3c - 2);$$

$$-\frac{16\sqrt{5}}{5}(3c - 2) = (c - 1)\theta + \zeta;$$

quest'equazione è soddisfatta dai valori trovati di θ, ζ, e ciò serve di prova.

come segue

$$\left[x^2-2(c+1)x+\frac{1}{5}(c+1)^2\right]^3+\frac{1}{600}[4(1-4c)\mu+75(c-10)]x=0;$$

e questa, se si pone

$$x=\frac{1}{5}(c+1)\xi,\quad \frac{5}{6}(10c-1)\mu-100(c-4)=1728\,Z,$$

diventa

$$(130)\qquad (\xi^2-10\xi+5)^3+1728\,Z\xi=0,$$

che è la più semplice risolvente di 6° grado dell'equazione icosaedrica *).

Per il valore $\lambda=c-1$ la (125') ha una radice nulla e si riduce ad un'equazione di 5° grado, che si può scrivere come segue

$$[x+(c-2)]^3[x+3(c-1)]x-\frac{1}{600}[4(1-4c)\mu+75(c-10)]=0;$$

e questa, se si pone

$$x=-\frac{1}{5}(c+1)r+\frac{1}{5}(13-2c)=-\frac{1}{5}(c+1)(r+8c'^3)$$

diventa

$$(131)\qquad (r-3)^3(r^2-11r+64)+1728\,Z=0,$$

che è la *risolvente delle* r dell'equazione icosaedrica **).

Dalle relazioni sopra stabilite tra le radici cubiche delle radici delle due risolventi (125) e (125') segue che, se si denotano con ξ_∞, ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 le radici della (130) e con r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 le radici della (131), si può, in 60 modi, fissare le determinazioni delle radici cubiche delle ξ per guisa che si ha

$$(132)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{\xi_\infty}+\sqrt[3]{\xi_0}+\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}+\sqrt[3]{\xi_3}+\sqrt[3]{\xi_4}=0 \\ \sqrt[3]{\xi_\infty}+\sqrt[3]{\xi_n}+\varepsilon\left(\sqrt[3]{\xi_{n+1}}+\sqrt[3]{\xi_{n+4}}\right)+\varepsilon^2\left(\sqrt[3]{\xi_{n+2}}+\sqrt[3]{\xi_{n+3}}\right)=2(1-c)\sqrt[3]{r_n+8c'^3} \end{cases}$$

per $n=0, 1, 2, 3, 4$, ritenendo $\xi_m=\xi_n$ se $m\equiv n$ (mod. 5). Queste sono nuove e notevoli relazioni irrazionali tra le radici delle due risolventi di 5° e 6° grado dell'equazione icosaedrica.

Se oltre a $\lambda=c-1$, si pone $\mu=\frac{15}{4}(13c-2)$, si ha il gruppo di punti P', e le (125) e (125') si riducono a

$$\left[x^2-2(c+1)x+\frac{1}{5}(c+1)^2\right]^3=0,\quad [x+(c-2)]^3[x+3(c-1)]x^2=0,$$

*) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, p. 102.

**) F. Klein, ibid., p. 110.

le quali hanno precisamente per radici i valori x ed x' forniti dalle (88).

Per un gruppo di punti situato sulla curva invariante di 12° ordine, che ha i punti doppi nei punti K, si ha $\lambda = 9$; per questo valore di λ la risolvente (125) si può scrivere

$$\left[x - \frac{1}{5}(6c + 1)\right]^5 (x - 5) + \frac{1 - 4c}{750}(5\mu + 12624)x = 0;$$

in particolare, per il valore $\mu = -\frac{12624}{5}$ corrispondente al gruppo di punti K, fornisce precisamente i valori x dati dalle (90). La stessa equazione, posto: $x = \frac{1}{5}(6c + 1)\tau$, assume la forma

$$(\tau - 1)^5 [\tau + (c + 1)^3] = k\tau, \tag{133}$$

con k costante arbitraria.

Per un gruppo di punti situato sulla curva invariante di 12° ordine, che ha i punti doppi nei punti U, si ha $\lambda = -\frac{9}{2}$; per questo valore di λ la risolvente (125) si può scrivere

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 (x + 4c^3)^2 + \frac{1 - 4c}{1200}(8\mu - 2595)x = 0;$$

in particolare, per il valore $\mu = \frac{2595}{8}$ corrispondente al gruppo di punti U, fornisce precisamente i valori x dati dalle (86). Se si pone $x = \frac{1}{10}\tau$, l'equazione coincide con quella, che è stata incontrata dal Sig. Fricke nello studio, che egli ha fatto dal punto di vista trascendente del gruppo G_{360} *). È notevolissimo che la stessa equazione, colla semplice trasformazione $x = \frac{\zeta^2}{2}$, si riduce alla risolvente speciale (126), nella quale si assuma

$$\theta = \frac{2595 - 8\mu}{180}.$$

48. — *Invarianti dei sottogruppi hessiani.*

Consideriamo il gruppo G_{36}, generato (n° 22) dalle collineazioni $T = S_{(123)}$ e $Y = Y_{(1425)} = Z T^2 Z^2$, e consideriamo insieme il gruppo

*) « Ueber eine einfache Gruppe von 360 Operationen » *Nachrichten v. d. k. Gesellsch. zu Göttingen*, 1896.

G_{18} in quello contenuto e generato da S, T e Y^2. Dalle (11) e (13) si ricava

$$Yf_1 = f_4, \quad Yf_2 = f_5, \quad Yf_3 = \varepsilon^2 f_6,$$
$$Yf_4 = \varepsilon f_2, \quad Yf_5 = \varepsilon f_1, \quad Yf_6 = \varepsilon^2 f_3.$$

Mercè queste sostituzioni insieme alle (10) e (11) si vede facilmente che le forme di 6° ordine

$$l_1 = f_1^6 + f_2^6 + f_3^6, \qquad l_2 = f_4^6 + f_5^6 + f_6^6,$$
$$n_1 = \varepsilon^2 f_1 f_2 f_3, \qquad n_2 = \varepsilon f_4 f_5 f_6$$

sono invarianti assoluti per il G_{18} e che la più generale forma di 6° ordine invariata dal G_{18} è una combinazione lineare di l_1, l_2, n_1, n_2. Tra queste quattro forme passa una relazione quadratica, che stabiliremo in seguito (152).

Osserviamo col mezzo delle (23), (24), (26) che anche le forme di 6° ordine

$$l'_1 = f_2'^6 + f_3'^6 + f_5'^6, \qquad l'_2 = f_1'^6 + f_4'^6 + f_6'^6,$$
$$n'_1 = \varepsilon f'_2 f'_3 f'_5, \qquad n'_2 = \varepsilon^2 f'_1 f'_4 f'_6$$

sono invarianti assoluti per il G_{18} e che perciò si esprimono linearmente mediante le precedenti. Per trovare queste espressioni, come pure per effettuare in seguito altri calcoli, occorre anzitutto conoscere i valori delle forme l_1, l_2, n_1, n_2, l'_1, l'_2, n'_1, n'_2 in alcuni dei poli di G_{360}. In questi poli calcoleremo ad un tempo i valori delle forme

$$m_1 = f_3^6 f_1^6 + f_1^6 f_2^6 + f_2^6 f_3^6, \qquad m_2 = f_5^6 f_6^6 + f_6^6 f_4^6 + f_4^6 f_5^6,$$
$$m'_1 = f_2'^6 f_3'^6 + f_3'^6 f_5'^6 + f_5'^6 f_2'^6, \qquad m'_2 = f_1'^6 f_4'^6 + f_4'^6 f_6'^6 + f_6'^6 f_1'^6,$$

che sono invarianti assoluti, di 12° ordine, per il gruppo G_{18} e che serviranno ancor essi in seguito.

È manifesto che colla sostituzione Y la forma l_1 si cambia in l_2 e la l_2 in l_1; così pure si cambiano l'una nell'altra la m_1 e la m_2, la n_1 e la n_2, la l'_1 e la l'_2, la m'_1 e la m'_2 e la n'_1 e la n'_2. Segue che oltre a

$$A = \frac{1}{6(c+1)}(l_1 + l_2) = \frac{1}{6(c'+1)}(l'_1 + l'_2),$$

le forme

$$\xi = n_1 + n_2 = \varepsilon^2 f_1 f_2 f_3 + \varepsilon f_4 f_5 f_6,$$
$$\xi' = n'_1 + n'_2 = \varepsilon f'_2 f'_3 f'_5 + \varepsilon^2 f'_1 f'_4 f'_6$$

sono invarianti assoluti di 6° ordine per il G_{36} e che $l_1 - l_2$, $n_1 - n_2$, $l'_1 - l'_2$, $n'_1 - n'_2$ sono invarianti relativi del 6° ordine per il G_{36}.

Ricordiamo (n° 22) che in un G_{18} vi sono 9 poli doppi, punti base di un fascio sizigetico di cubiche; per il G_{18} qui considerato essi sono i punti: $U_{(23)(56)}$, $U_{(31)(56)}$, $U_{(12)(56)}$, $U_{(23)(64)}$, $U_{(31)(64)}$, $U_{(12)(64)}$, $U_{(23)(45)}$,

$U_{(31)(45)}$, $U_{(12)(45)}$. Le 9 rette u, che hanno gli stessi indici, sono gli assi doppi del G_{18} e contengono i rimanenti 36 punti U, due per ciascuna.

Applicando le collineazioni del G_{36}, i 45 punti U si dividono in tre gruppi, costituiti l'uno dai 9 punti U sopradetti e gli altri due di 18 punti ciascuno, che sono i vertici dei triangoli (n° 11) Δ_{23}, Δ_{31}, Δ_{12}, Δ_{56}, Δ_{64}, Δ_{45} per l'uno e per l'altro i vertici dei triangoli $\Delta_{2'3'}$, $\Delta_{3'5'}$, $\Delta_{5'2'}$, $\Delta_{4'6'}$, $\Delta_{6'1'}$, $\Delta_{1'4'}$. Osserviamo che $U_{(12)(56)}$, $U_{(34)(56)}$, $U_{(34)(26)}$ appartengono rispettivamente al 1°, al 2° ed al 3° gruppo, e calcoliamo in questi tre punti gli invarianti del G_{18} sopra introdotti.

Nel punto $U_{(34)(56)}$ si ha per le (36), (37)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{-2c}{f_1}=\frac{-2c\varepsilon}{f_2}=\frac{1}{f_3}=\frac{\varepsilon}{f_4}=\frac{\varepsilon}{f_5}=\frac{1}{f_6}=\theta,\\
&\frac{\varepsilon^2}{f'_1}=\frac{\varepsilon^2}{f'_2}=\frac{\varepsilon}{f'_3}=\frac{-2c'}{f'_4}=\frac{-2c'}{f'_5}=\frac{\varepsilon}{f'_6}=\theta,
\end{aligned}\right.\qquad \theta^3=2;$$

$$(134)\quad\left\{\begin{aligned}
&l_1=\frac{3}{2}(3+4c),\quad l_2=\frac{3}{2},\quad n_1=c-2,\quad n_2=\frac{1}{2};\\
&l'_1=l'_2=3(1+c'),\quad n'_1=-c'\varepsilon,\quad n'_2=-c'\varepsilon^2;\\
&m_1=\frac{2}{3}(13c-6),\quad m_2=\frac{3}{4};\quad \xi=-(c'+1),\quad \xi'=c'.
\end{aligned}\right.$$

Nel punto $U_{(34)(26)}$ si ha: $U_{(34)(26)}=Z^3\,U_{(34)(56)}$;

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{-2c}{f_1}=\frac{\varepsilon}{f_2}=\frac{\varepsilon}{f_3}=\frac{1}{f_4}=\frac{-2c\varepsilon}{f_5}=\frac{1}{f_6}=\theta,\\
&\frac{\varepsilon^2}{f'_1}=\frac{-2c'}{f'_2}=\frac{-2c'}{f'_3}=\frac{\varepsilon}{f'_4}=\frac{\varepsilon^2}{f'_5}=\frac{\varepsilon}{f'_6}=\theta,
\end{aligned}\right.\qquad \theta^3=2;$$

$$(135)\quad\left\{\begin{aligned}
&l_1=l_2=3(1+c),\quad n_1=-c\varepsilon,\quad n_2=-c\varepsilon^2;\\
&l'_1=\frac{3}{2}(3+4c'),\quad l'_2=\frac{3}{2},\quad n'_1=c'-2,\quad n'_2=\frac{1}{2};\\
&m_1=m_2=\frac{3}{4}(3+4c);\quad \xi=c,\quad \xi'=-(c+1).
\end{aligned}\right.$$

Nel punto $U_{(12)(56)}$ si ha: $U_{(12)(56)}=ZS^2T\,U_{(34)(56)}$;

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{f_1}=\frac{\varepsilon}{f_2}=\frac{-2c}{f_3}=\frac{-2c\varepsilon}{f_4}=\frac{\varepsilon}{f_5}=\frac{1}{f_6}=\theta,\\
&\frac{\varepsilon^2}{f'_1}=\frac{\varepsilon^2}{f'_2}=\frac{\varepsilon}{f'_3}=\frac{-2c'\varepsilon^2}{f'_4}=\frac{-2c'\varepsilon^2}{f'_5}=\frac{\varepsilon}{f'_6}=\theta,
\end{aligned}\right.\qquad \theta^3=2;$$

$$(136)\quad\left\{\begin{aligned}
&l_1=l_2=3(c+1),\quad n_1=n_2=-c;\\
&l'_1=l'_2=3(c'+1),\quad n'_1=n'_2=-c';\\
&m_1=m_2=\frac{3}{4}(3+4c);\quad \xi=-2c,\quad \xi'=-2c'.
\end{aligned}\right.$$

Come si è visto per i punti U, così anche per i punti V accade che applicando il G_{36} si dividono in tre gruppi, due di 36 punti ed uno di 18 punti; appartengono a gruppi diversi i punti $V'_{(34)(56)}$, $V'_{(34)(26)}$, $V'_{(12)(56)}$.

Nel punto $V'_{(34)(56)}$ si ha per le (49), (50):

$$\frac{i(\varepsilon^2-\omega)}{f_1}=\frac{-i\varepsilon(\varepsilon^2-\omega)}{f_2}=\frac{-1}{f_3}=\frac{-\varepsilon}{f_4}=\frac{\varepsilon}{f_5}=\frac{1}{f_6}=1,$$

$$\frac{\varepsilon^2}{f'_1}=\frac{\varepsilon^2}{f'_2}=\frac{-\varepsilon}{f'_3}=\frac{i(\varepsilon-\omega)}{f'_4}=\frac{-i(\varepsilon-\omega)}{f'_5}=\frac{-\varepsilon}{f'_6}=i;$$

$$(137)\quad\begin{cases} l_1=-l_2=-1, & n_1=-2c, \quad n_2=-1;\\ l'_1=-l'_2=-2c'(\varepsilon-\omega), & n'_1=\varepsilon(\omega-\varepsilon), \quad n'_2=-\varepsilon^2(\omega-\varepsilon);\\ m_1=-2(3c+2), \quad m_2=-1; & \xi=-\xi'=-(2c+1).\end{cases}$$

Nel punto $V'_{(34)(26)}$ si ha: $V'_{(34)(26)}=Z^3V'_{(34)(56)}$;

$$\frac{i(\varepsilon^2-\omega)}{f_1}=\frac{-\varepsilon}{f_2}=\frac{\varepsilon}{f_3}=\frac{1}{f_4}=\frac{-i\varepsilon(\varepsilon^2-\omega)}{f_5}=\frac{-1}{f_6}=1;$$

$$\frac{\varepsilon^2}{f'_1}=\frac{i(\varepsilon-\omega)}{f'_2}=\frac{-i(\varepsilon-\omega)}{f'_3}=\frac{-\varepsilon}{f'_4}=\frac{\varepsilon^2}{f'_5}=\frac{-\varepsilon}{f'_6}=i;$$

$$(138)\quad\begin{cases} l_1=-l_2=-2ci(\varepsilon^2-\omega), & n_1=-i\varepsilon(\varepsilon^2-\omega), \quad n_2=i\varepsilon^2(\varepsilon^2-\omega);\\ l'_1=-l'_2=i, & n'_1=2c'i, \quad n'_2=i;\\ m_1=m_2=-1; & \xi=-\xi'=-i(2c'+1).\end{cases}$$

Nel punto $V'_{(12)(56)}$ si ha: $V'_{(12)(56)}=ZS^2TV'_{(34)(56)}$;

$$\frac{-1}{f_1}=\frac{-\varepsilon}{f_2}=\frac{i(\varepsilon^2-\omega)}{f_3}=\frac{-i\varepsilon(\varepsilon^2-\omega)}{f_4}=\frac{\varepsilon}{f_5}=\frac{1}{f_6}=1,$$

$$\frac{\varepsilon^2}{f'_1}=\frac{-\varepsilon^2}{f'_2}=\frac{-\varepsilon}{f'_3}=\frac{-i\varepsilon(\varepsilon-\omega)}{f'_4}=\frac{i\varepsilon^2(\varepsilon-\omega)}{f'_5}=\frac{\varepsilon}{f'_6}=i;$$

$$(139)\quad\begin{cases} l_1=-l_2=-2-2ci(\varepsilon^2-\omega), & n_1=-n_2=i(\varepsilon^2-\omega);\\ l'_1=-l'_2=-2i+2c'(\varepsilon-\omega), & n'_1=-n'_2=-(\varepsilon-\omega);\\ m_1=m_2=1+4ci(\varepsilon^2-\omega); & \xi=\xi'=0.\end{cases}$$

Calcoliamo ancora i valori degli invarianti di G_{18} in un punto P, in un punto K ed in un punto H.

Nel punto $P_{23,1}$ si ha per le (40) e (43) con $\theta^3=-\frac{1}{2}c^2$:

$$(140)\quad\begin{cases} l_1=\frac{3}{2}(1+2c), \quad l_2=\frac{3}{2}(2c+3), \quad n_1=0, \quad n_2=\frac{1}{2}(2c+3);\\ l'_1=\frac{3}{5}(3-4\omega)(1+c'), \quad l'_2=\frac{3}{5}(3-4\omega')(1+c');\\ n'_1=\frac{1}{6}(2+\varepsilon)(2\omega-1)(2c+1), \quad n'_2=\frac{1}{6}(\varepsilon-1)(2\omega+3)(2c+1);\\ m_1=0, \quad m_2=\frac{3}{4}(14c+5), \quad \xi=\frac{1}{2}(2c+3), \quad \xi'=-\frac{1}{2}(2c+5).\end{cases}$$

Nel punto $K_{(23456)}$ si ha per le (52) e (53) con $\theta^3 = \frac{1}{4}(2-3c)$:

$$
(141)\quad \begin{cases}
l_1 = \frac{3}{5}(4c+9),\ l_2 = \frac{3}{5}(6c+1),\ n_1 = \varepsilon^2(1-2c),\ n_2 = \frac{1}{5}\varepsilon(6c+1); \\
l'_1 = \frac{3}{5}(6c'+1),\quad l'_2 = \frac{3}{5}(4c'+9),\quad n'_1 = \frac{1}{5}\varepsilon(4-6c),\quad n'_2 = 2c\varepsilon^2; \\
m_1 = \frac{3}{5}(22c+1),\quad m_2 = \frac{3}{5}(6c-7); \\
\xi = \frac{1}{5}(-9-12\omega+2c),\quad \xi' = \frac{1}{5}(-9-12\omega'+2c').
\end{cases}
$$

Nel punto $H'_{(23456)}$ si ha per le (57) con $\theta = 1$:

$$
(142)\quad \begin{cases}
l_1 = -l_2 = 1+\eta, & n_1 = 0, \quad n_2 = \varepsilon\eta^3; \\
l'_1 = -l'_2 = -1-\eta-\eta^3, & n'_1 = -\varepsilon\eta^3, \quad n'_2 = 0; \\
m_1 = \eta,\quad m_2 = 1+\eta+\eta^2 & \xi = -\xi' = \varepsilon\eta^3.
\end{cases}
$$

Per quanto si è detto in principio, si deve avere per valori convenienti delle costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \rho$:

$$
l'_1 = \alpha l_1 + \beta l_2 + \gamma n_1 + \delta n_2,
$$
$$
n'_1 = \lambda l_1 + \mu l_2 + \nu n_1 + \rho n_2,
$$

e per conseguenza, applicando la sostituzione Y:

$$
l'_2 = \beta l_1 + \alpha l_2 + \delta n_1 + \gamma n_2,
$$
$$
n'_2 = \mu l_1 + \lambda l_2 + \rho n_1 + \nu n_2.
$$

Da queste relazioni si ricavano, combinandole per addizione e sottrazione, le seguenti

$$
6(c+1)(\alpha+\beta)A + (\gamma+\delta)\xi = 6(c'+1)A,
$$
$$
6(c+1)(\lambda+\mu)A + (\nu+\rho)\xi = \xi',
$$
$$
(\alpha-\beta)(l_1-l_2) + (\gamma-\delta)(n_1-n_2) = l'_1 - l'_2,
$$
$$
(\lambda-\mu)(l_1-l_2) + (\nu-\rho)(n_1-n_2) = n'_1 - n'_2.
$$

Sostituendo il punto $U_{(34)(56)}$ e poi il punto $U_{(34)(26)}$, tenuto conto delle (134) e (135), si formano le seguenti equazioni tra i coefficienti incogniti $\alpha, \beta, \ldots, \rho$:

$$
6(c+1)(\alpha+\beta) - (c'+1)(\gamma+\delta) = 6(c'+1),
$$
$$
6(c+1)(\lambda+\mu) - (c'+1)(\nu+\rho) = c',
$$
$$
3(2c+1)(\alpha-\beta) - (c'+2)(\gamma-\delta) = 0,
$$
$$
3(2c+1)(\lambda-\mu) - (c'+2)(\nu-\rho) = c'(\varepsilon^2-\varepsilon),
$$
$$
6(c+1)(\alpha+\beta) + c(\gamma+\delta) = 6(c'+1),
$$
$$
6(c+1)(\lambda+\mu) + c(\nu+\rho) = -(c+1),
$$
$$
c(\varepsilon^2-\varepsilon)(\gamma-\delta) = 3(2c'+1),
$$
$$
c(\varepsilon^2-\varepsilon)(\nu-\rho) = -(c+2),
$$

le quali risolute dànno:

$$\alpha+\beta=c',\quad \gamma+\delta=0,\quad \lambda+\mu=-\frac{1}{15}(c'+1),\quad \nu+\rho=-1;$$

$$\alpha-\beta=c'(\omega-\varepsilon),\quad \gamma-\delta=3(\omega-\varepsilon),\quad \lambda-\mu=\frac{1}{2}c'(\varepsilon^2-\omega),\quad \nu-\rho=\varepsilon^2-\omega.$$

Con questi valori le relazioni precedenti si riducono a

$$\xi+\xi'+A=0, \tag{143}$$

$$\left\{\begin{aligned} l'_1-l'_2&=-c'(\varepsilon-\omega)[(l_1-l_2)+3c(n_1-n_2)],\\ n'_1-n'_2&=\frac{1}{2}(\varepsilon-\omega)[(l_1-l_2)+2c(n_1-n_2)]. \end{aligned}\right. \tag{144}$$

49. — *Primo cenno sulla risolvente di 10° grado.*

Osserviamo che la funzione ξ, che è invariante assoluto per uno dei 10 sottogruppi G_{36}, quando si applichino tutte le sostituzioni del G_{1080}, si trasforma nelle 10 funzioni seguenti

$$\begin{aligned}
\xi_0&=\varepsilon^2 f_1f_2f_3+\varepsilon f_4f_5f_6, & \xi_5&=\varepsilon^2 f_3f_5f_6+\varepsilon f_1f_2f_4,\\
\xi_1&=\varepsilon^2 f_1f_3f_4+\varepsilon f_5f_6f_2, & \xi_6&=\varepsilon^2 f_4f_6f_2+\varepsilon f_1f_3f_5,\\
\xi_2&=\varepsilon^2 f_1f_4f_5+\varepsilon f_6f_2f_3, & \xi_7&=\varepsilon^2 f_5f_2f_3+\varepsilon f_1f_4f_6,\\
\xi_3&=\varepsilon^2 f_1f_5f_6+\varepsilon f_2f_3f_4, & \xi_8&=\varepsilon^2 f_6f_3f_4+\varepsilon f_1f_5f_2,\\
\xi_4&=\varepsilon^2 f_1f_6f_2+\varepsilon f_3f_4f_5, & \xi_9&=\varepsilon^2 f_2f_4f_5+\varepsilon f_1f_6f_3,
\end{aligned}$$

le quali si ottengono dalla ξ applicando le sostituzioni

$$Z^kO^i. \qquad (i=0,\ 1;\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Segue che, assumendo per incognita la ξ, questa soddisfa ad una equazione di 10° grado, che è una risolvente del problema delle forme del G_{1080}.

Per costruire tale risolvente, si può, secondo il solito, calcolare le $\sum^i \xi_i^k$, che sono invarianti assoluti del G_{1080} esprimibili come segue:

$$\begin{aligned}
\sum\xi_i&=\alpha A,\\
\sum\xi_i^2&=\beta_0A^2+\beta_1H,\\
\sum\xi_i^3&=\gamma_0A^3+\gamma_1HA,\\
\sum\xi_i^4&=\delta_0A^4+\delta_1HA^2+\delta_2H^2,\\
\sum\xi_i^5&=\varepsilon_0A^5+\varepsilon_1HA^3+\varepsilon_2H^2A+\zeta J,
\end{aligned}$$

. . . .

$$\sum\xi_i^{10}=\lambda_0A^{10}+\lambda_1HA^8+\ldots+\lambda_5H^5+(\mu_0A^4+\mu_1HA^2+\mu_2H^2)JA+\nu J^2;$$

i coefficienti numerici α, β_0, β_1, ..., ν si possono ottenere sostituendo in queste equazioni alle variabili particolari valori.

Così nel punto $U_{(12,5,96)}$ si ha

$$\xi_0=\xi_5=-2c,\quad \xi_1=\xi_3=\xi_4=\xi_8=-(1+c'),\quad \xi_2=\xi_6=\xi_7=\xi_9=c;$$

e quindi

$$\sum \xi_i = 4c-6,\quad \sum \xi_i^2 = -4c-7,\quad \text{ecc.}$$

Nel punto $P_{23,1}$ si ha

$$\xi_0=\frac{1}{2}(2c+3),\quad \xi_1=\xi_4=\xi_5=\xi_6=\xi_8=\xi_9=0,\quad \xi_2=\xi_3=\xi_7=\frac{1}{2}(2c-5);$$

e quindi

$$\sum \xi_i = 4c-6,\quad \sum \xi_i^2 = 17-10c,\quad \text{ecc.}$$

Poi, tenute presenti le (94), (95), ecc. e sostituendo le coordinate dei punti U, P, ecc. nelle equazioni soprascritte, si ha

$$4c-6=\alpha,\quad -4c-7=\beta_0-\frac{9}{2}\beta_1,\quad -10c+17=\beta_0+(c'-1)\beta_1,\quad \text{ecc. ecc.}$$

donde si ricava

$$\alpha=4c-6,\quad \beta_0=4(5-c),\quad \beta_1=6,\quad \text{ecc. ecc.}$$

Ma i calcoli, man mano che si procede nella determinazione delle costanti successive $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \nu$, diventano eccessivamente lunghi e, quel che è peggio, il numero delle incognite è tanto grande che per determinarle tutte non basta l'uso dei soli valori che conosciamo delle ξ e di A, H, J, che sono i valori che queste prendono nei punti uniti di G_{360}.

Occorre dunque escogitare un altro metodo per costruire in modo completo una risolvente di 10° grado, ciò che faremo nei numeri successivi; vedremo anzi che si può all'incognita ξ sostituirne un'altra in modo da avere il vantaggio che i coefficienti della risolvente siano tutti reali.

Frattanto gioviamoci del risultato qui ottenuto

$$(145)\qquad \sum \xi_i^2 = 4(5-c)A^2+6H$$

per dimostrare una formola, di cui abbiamo avuto bisogno al n° 40.

Osserviamo che

$$\xi_0^2=\varepsilon f_1^2 f_2^2 f_3^2+\varepsilon^2 f_4^2 f_5^2 f_6^2+2F,\quad \xi_1^2=\varepsilon f_1^2 f_3^2 f_4^2+\varepsilon^2 f_5^2 f_6^2 f_2^2+2F,\ \text{ecc.}$$

donde, sommando e tenendo presenti insieme alla (45) le (93) e (100), si ha

$$(146)\qquad \left\{\begin{aligned} &\ \ \varepsilon\,(f_1^2 f_2^2 f_3^2+f_1^2 f_3^2 f_4^2+\cdots+f_3^2 f_5^2 f_6^2)\\ &+\varepsilon^2(f_4^2 f_5^2 f_6^2+f_5^2 f_6^2 f_2^2+\cdots+f_1^2 f_2^2 f_4^2)\\ &=-(28c+2)F+(24c+20)F'. \end{aligned}\right.$$

50. — *I fasci di 6° ordine e le cubiche armoniche invarianti per* G_{36}.

Le curve di 6° ordine invarianti per G_{18} hanno per equazione

(147) $$\lambda l_1 + \mu l_2 + \nu n_1 + \rho n_2 = 0$$

e formano un sistema lineare ∞^3. Tra esse consideriamo quelle che passano per quei 9 punti U che son poli doppi di G_{18}. Sostituendo uno qualunque di questi punti, si ha per le (136) che i parametri λ, μ, ν, ρ debbono soddisfare alla condizione

(148) $$3(c+1)(\lambda+\mu) - c(\nu+\rho) = 0.$$

Le curve considerate formano una rete, ogni curva della quale si decompone in due cubiche del fascio sizigetico invariante per G_{18}. Infatti, presi due punti qualunque del piano, si considerino le due cubiche di questo fascio che passano per l'uno o per l'altro e la sestica di quella rete che passa per entrambi; la sestica ha in comune con ciascuna delle cubiche i 9 punti U insieme ad altri 18 punti, che sono i trasformati mediante G_{18} del punto per il quale è stata condotta la cubica.

Se alla (147) applichiamo la sostituzione Y, abbiamo

$$\mu l_1 + \lambda l_2 + \rho n_1 + \nu n_2 = 0,$$

e, confrontando questa colla (147) stessa, concludiamo che le sestiche invarianti per G_{36} si ottengono ponendo

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\nu}{\rho} = \frac{\rho}{\nu} = \pm 1$$

e però costituiscono due fasci; per $\lambda = \mu = \dfrac{1}{c+1}$, $\nu = \rho$ si ha il fascio

(149) $$6A + \nu\xi = 0,$$

e per $\lambda = -\mu = 1$, $\nu = -\rho$ si ha il fascio

(150) $$l_1 - l_2 + \nu(n_1 - n_2) = 0.$$

Le sestiche del secondo fascio, per essere soddisfatta la condizione (148), sono decomposte in coppie di cubiche del fascio sizigetico, e precisamente ogni coppia consta di due cubiche, che colle collineazioni di G_{36} o sono invariate o sono mutate l'una nell'altra. In particolare per $\nu = 0$ e $\nu = -3c$, si hanno, per la (144), le sestiche

$$l_1 - l_2 = 0, \qquad l'_1 - l'_2 = 0,$$

che si spezzano l'una nelle due curve Jacobiane per le terne di coniche (1) (2) (3) e (4) (5) (6), e l'altra nelle due curve Jacobiane per le terne di coniche (2') (3') (5') e (1') (4') (6'); invero, per le (135), la

forma $l_1 - l_2$ si annulla nei 18 punti U, che sono vertici di triangoli autoconiugati rispetto a due qualunque delle coniche (1), (2), (3) o a due qualunque delle coniche (4), (5), (6), e, per le (134), la forma $l_1 - l_2$ si annulla negli altri 18 punti U, vertici di triangoli autoconiugati rispetto a due qualunque delle coniche (2), (3), (5) o a due qualunque delle coniche (1), (4), (6).

Delle sei cubiche armoniche del fascio sizigetico ve ne sono due, come è noto, ciascuna delle quali è invariata da tutte le collineazioni di G_{36}; queste, considerate come doppie, sono anche rappresentate dalla (150) per convenienti valori ν_1, ν_2 di ν.

Le sestiche del primo fascio si toccano nei 18 punti V, che stanno sugli assi delle omologie di G_{18}; esse sono in generale irreducibili, perchè tale è la $\Delta = 0$, che appartiene al fascio. In particolare per $\nu = 3c'$ la (149) si può scrivere

$$\xi + 2c\Delta = 0, \tag{151}$$

e, siccome è anche soddisfatta la condizione (148), questa rappresenta una sestica, che si decompone in due curve del fascio sizigetico; ma, essendo il primo membro della (151) un invariante assoluto, non può per alcun valore di ν dedursi dal primo membro della (150), che è un invariante relativo; dunque la (151) rappresenta complessivamente due cubiche, che sono trasformate ciascuna in sè da tutte le collineazioni di G_{36}.

Pertanto le due cubiche armoniche, che sono invariate dal G_{36}, presa ciascuna come doppia, sono due curve diverse del fascio (150), e prese nel loro insieme sono una curva del fascio (149). Segue che deve sussistere un'identità della forma

$$\alpha(l_1 - l_2)^2 + 2\beta(l_1 - l_2)(n_1 - n_2) + \gamma(n_1 - n_2)^2 = (\xi + 2c\Delta)^2$$

e che i valori ν_1, ν_2 di ν, per i quali la (150) rappresenta le dette cubiche armoniche, sono le radici dell'equazione

$$\alpha\nu^2 - 2\beta\nu + \gamma = 0.$$

Allo scopo di determinare i coefficienti α, β, γ, sostituiremo successivamente i punti $U_{(34)(26)}$, $U_{(34)(56)}$, $V'_{(34)(56)}$; tenendo presenti le (135), (134), (137), otterremo le seguenti equazioni

$$-3c^2\gamma = 9c^2,$$

$$-54c'\alpha + 18(c' - 2)\beta + \frac{3}{2}(3c' + 2)\gamma = \frac{9}{2}(c' - 2),$$

$$4\alpha - 8c'\beta + 2(c' - 2)\gamma = -6c',$$

dalle quali ricaviamo

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 2c, \qquad \gamma = -3.$$

Adunque resta stabilita la relazione

$$(152)\quad (l_1 - l_2)^2 + 4c(l_1 - l_2)(n_1 - n_2) - 3(n_1 - n_2)^2 = (\xi + 2cA)^2,$$

che è la relazione quadratica tra le forme l_1, l_2, n_1, n_2, di cui al n° 48. In virtù delle (144) essa si può anche scrivere

$$(152')\quad (l'_1 - l'_2)^2 + 4c'(l'_1 - l'_2)(n'_1 - n'_2) - 3(n'_1 - n'_2)^2 = (\xi + 2cA)^2.$$

Nel tempo stesso, ponendo

$$(153)\qquad \begin{cases} X_1 = l_1 - l_2 + \nu_1(n_1 - n_2) \\ X_2 = l_1 - l_2 + \nu_2(n_1 - n_2), \end{cases}$$

si ha che le equazioni $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, rappresentano, come doppie, le due cubiche armoniche invariate dal G_{36}, se ν_1 e ν_2 sono le radici di

$$\nu^2 - 4c\nu - 3 = 0,$$

cioè

$$\left.\begin{matrix}\nu_1\\ \nu_2\end{matrix}\right\} = 2c \pm i(\varepsilon - \omega).$$

Dalle (153) si ricava:

$$(154)\qquad \begin{cases} l_1 - l_2 = -\dfrac{1}{4} i(\varepsilon^2 - \omega)(-\nu_2 X_1 + \nu_1 X_2) \\ n_1 - n_2 = \dfrac{1}{4} i(\varepsilon^2 - \omega)(X_1 - X_2). \end{cases}$$

Se introduciamo poi anche l'equazione

$$\nu'^2 - 4c'\nu' - 3 = 0,$$

di cui le radici sono

$$\left.\begin{matrix}\nu'_1\\ \nu'_2\end{matrix}\right\} = 2c' \pm i(\varepsilon^2 - \omega),$$

vediamo, mediante le (144), che si ha

$$(155)\qquad \begin{cases} l'_1 - l'_2 + \nu'_1(n'_1 - n'_2) = iX_1 \\ l'_1 - l'_2 + \nu'_2(n'_1 - n'_2) = -iX_2; \end{cases}$$

donde si ricava

$$(156)\qquad \begin{cases} l'_1 - l'_2 = -\dfrac{1}{4}(\varepsilon - \omega)(\nu'_2 X_1 + \nu'_1 X_2) \\ n'_1 - n'_2 = \dfrac{1}{4}(\varepsilon - \omega)(X_1 + X_2). \end{cases}$$

51. — *Il problema delle forme di* G_{36}.

D'ora in poi tra gli invarianti relativi del 6° ordine di G_{36} assumeremo a fondamentali X_1 ed X_2; tra gli invarianti assoluti del 6° ordine

assumeremo a fondamentali A ed il seguente

$$X = 2(1 - c)\xi + 2(1 - c')\xi',$$

il quale in virtù della (143) si può anche scrivere

$$X = (1 - 4c)\xi - (1 + 2c)A$$
$$= (1 - 4c')\xi' - (1 + 2c')A.$$

Avendosi

$$X + 9A = (1 - 4c)(\xi + 2cA), \tag{157}$$

segue dalla (151) che l'equazione complessiva delle cubiche armoniche invariate dal G_{36} è: $X + 9A = 0$; segue inoltre dalle (152), (153) che tra i quattro invarianti A, X, X_1, X_2 ha luogo la relazione quadratica

$$(X + 9A)^2 + 15X_1X_2 = 0. \tag{158}$$

Dati i valori di A, X, X_1, X_2 in modo che questa relazione sia soddisfatta, il problema delle forme di G_{36} consiste nel cercare i corrispondenti valori delle variabili, che consideriamo come le tre coordinate proiettive di un punto.

I due fasci di sestiche invariati da G_{36} ora hanno per equazioni

$$X_1 - \nu X_2 = 0, \qquad X - \rho A = 0,$$

ed ogni gruppo di 36 punti trasformato in sè dal G_{36} (e non situato sull'una o sull'altra delle due cubiche armoniche) *) è l'intersezione di una curva del primo con una curva del secondo fascio. Il problema delle forme di G_{36} si riduce a trovare quei 36 punti dati che siano ν e ρ.

È chiaro che un gruppo di 36 punti trasformato in sè dal G_{36} fa parte d'un gruppo di 360 punti trasformato in sè dal G_{360}, e d'altra parte che gli invarianti H, J di G_{360}, essendo invarianti non fondamentali di G_{36}, sono esprimibili razionalmente mediante gli invarianti A, X, X_1, X_2 di G_{36}. Sono queste espressioni che ci proponiamo di trovare, per risalire così dal problema delle forme del G_{36} al problema delle forme del G_{360}.

52. — *Espressione di* H *mediante* A, X, X_1, X_2.

Consideriamo la forma $X_1^2 + X_2^2$, che è un invariante di 12° ordine per il G_{36}; essa, per mezzo della (153), si può scrivere

*) Se un gruppo di 36 punti è situato sopra una cubica armonica, che fa parte di curve dell'uno e dell'altro dei fasci considerati, lo si darà invece come intersezione di quella con una curva d'un fascio degenere di 12° ordine, il quale è $X_1^2 - \nu A^2 = 0$, se la cubica armonica su cui sta il gruppo è $X_2 = 0$.

$$X_1^2 + X_2^2 = 2(l_1 - l_2)^2 + 8c(l_1 - l_2)(n_1 - n_2) + (8c - 10)(n_1 - n_2)^2,$$
indi, per le (152) e (157):

$$(159) \qquad X_1^2 + X_2^2 = -\frac{2}{15}(X + 9A)^2 - 8c'(n_1 - n_2)^2.$$

Or bene si ha

$$(n_1 - n_2)^2 = (n_1 + n_2)^2 - 4n_1 n_2 = \xi^2 - 4F,$$
ed in virtù delle (157) e (102):

$$(160) \qquad -15(n_1 - n_2)^2 = X^2 + 2(2c+1)AX + 9(2c+1)A^2 - 4(c-4)H.$$

Sostituendo nella (159) risulta

$$(161) \qquad (c - c')(X_1^2 + X_2^2) - X^2 - 2AX - 9A^2 = 16H$$
e questa è l'espressione, che si cercava, di H mediante A, X, X_1, X_2.

Da questa e dalla (158) si deduce inoltre

$$(162) \qquad \begin{aligned} -\frac{225}{64}(X_1^2 - X_2^2)^2 = X^4 + 6AX^3 + 51A^2X^2 + 216A^3X + 486A^4 \\ + 30(X^2 + 2AX + 9A^2)H + 240H^2, \end{aligned}$$
formola che ci servirà in seguito.

53. — *Espressione di G mediante gli invarianti di G_{36}.*

Il calcolo dell'invariante J di G_{360} mediante gli invarianti A, X, X_1, X_2 di G_{36} è molto complicato. Per giungere al risultato ci conviene anzitutto cercare la espressione di G, facendo uso nuovamente degli invarianti relativi $l_1 - l_2$, $n_1 - n_2$ invece di X_1, X_2.

Per la stessa definizione di G (n° 42) si ha:

$$\begin{aligned} -G &= m_1 n_2^3 + m_2 n_1^3 \\ &= \frac{1}{2}(n_1^3 + n_2^3)(m_1 + m_2) - \frac{1}{2}(n_1^3 - n_2^3)(m_1 - m_2), \end{aligned}$$
e però scomporremo il calcolo di G nel calcolo delle quattro forme

$$n_1^3 + n_2^3, \qquad n_1^3 - n_2^3, \qquad m_1 + m_2, \qquad m_1 - m_2,$$
che sono invarianti per G_{36} e sono le prime due di grado 18 e le altre due di grado 12.

a) Calcolo di $n_1^3 + n_2^3$ e di $n_1^3 - n_2^3$. — Abbiamo

$$2n_1 = \xi + (n_1 - n_2), \qquad 2n_2 = \xi - (n_1 - n_2),$$
donde

$$4(n_1^3 + n_2^3) = \xi^3 + 3(n_1 - n_2)^2\xi,$$
$$4(n_1^3 - n_2^3) = [3\xi^2 + (n_1 - n_2)^2](n_1 - n_2);$$
e queste, in virtù delle (157) e (160), diventano

$$(163)\quad \begin{aligned}30(c-c')(n_1^3+n_2^3)=X^3+3(2c+1)AX^2+27cA^2X+6(7c-4)A^3\\ -3(c-4)HX+18(c+1)HA,\end{aligned}$$

$$(164)\quad -15(n_1^3-n_2^3)=[X^2+2(2c+1)AX+9cA^2-(c-4)H](n_1-n_2).$$

b) *Calcolo di* m_1+m_2. — Osserviamo che si ha

$$m_1+m_2+l_1l_2=\sum x_i x_k;$$

ma, per la (124), si ha

$$\sum x_i x_k = a_2 = (c-1)H+33cA^2,$$

inoltre si ha

$$4l_1l_2=(l_1+l_2)^2-(l_1-l_2)^2=90cA^2-(l_1-l_2)^2;$$

dunque, sostituendo, risulta

$$(165)\quad 4(m_1+m_2)=42cA^2+4(c-1)H+(l_1-l_2)^2.$$

c) *Calcolo di* m_1-m_2. — Essendo la forma m_1-m_2 un invariante relativo d'ordine 12 per G_{36}, deve potersi esprimere come segue

$$m_1-m_2=(\alpha A+\alpha' X)(l_1-l_2)+(\beta A+\beta' X)(n_1-n_2).$$

A determinare le costanti α, α', β, β' sostituiamo il punto $U_{(34)(26)}$, e, tenute presenti le (135), troviamo l'equazione

$$\beta-3(c-1)\beta'=0;$$

sostituiamo poscia il punto $V_{(34)(26)}$, e, tenute presenti le (138), abbiamo

$$\beta'=4c\alpha';$$

sostituiamo in terzo luogo il punto $H'_{(23456)}$, e, tenute presenti le (142), abbiamo

$$-\omega=(1-4c)[2\varepsilon\omega'\alpha'-\varepsilon^2\beta'];$$

da questa e dalle precedenti si ricava

$$\alpha'=\frac{1}{30}(4c-1),\quad \beta'=\frac{2}{15}(c-4),\quad \beta=-\frac{3}{5}(3c-2);$$

infine per determinare α sostituiamo il punto $U_{(34)(56)}$, e, tenute presenti le (134), abbiamo l'equazione

$$78c-15=(6c+3)\alpha-27c'\alpha'-(c'+2)\beta+\frac{9}{2}(c'-2)\beta',$$

la quale, dopo di avere sostituito i valori sopra trovati di α', β', β, dà

$$\alpha=\frac{6}{5}(c+1).$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned}m_1-m_2=\frac{6}{5}(c+1)A(l_1-l_2)+\frac{1}{30}(4c-1)X(l_1-l_2)\\ +\frac{3}{5}(2-3c)A(n_1-n_2)+\frac{2}{15}(c-4)X(n_1-n_2),\end{aligned}$$

ossia

$$(166)\qquad \begin{aligned} 4(c-c')(m_1-m_2) &= [12(c-1)A-X](l_1-l_2)\\ &\quad+[6(c+2)A-4cX](n_1-n_2). \end{aligned}$$

d) *Espressione di G.* — Ed ora per avere l'espressione cercata di G non resta che a sostituire nell'espressione sopra scritta di G i risultati ottenuti nelle (163), (164), (165), (166), sviluppare ed ordinare. A calcoli fatti si trova:

$$(167)\quad \left\{ \begin{aligned} &\qquad\qquad -240(c-c')G\\ &=42cA^2X^3+252(c-1)A^3X^2+567(c-2)A^4X-126(c+14)A^5\\ &+[4(c-1)X^3-36AX^2+9(43c+2)A^2X+18(53c-46)A^3]H\\ &+[18(3c-2)X+36(c-4)A]H^2\\ &+[X^3+3(2c+1)AX^2+27cA^2X+6(7c-4)A^3](l_1-l_2)^2\\ &+[18(c+1)A-3(c-4)X]H(l_1-l_2)^2\\ &+2[-X^3+2(4c-7)AX^2-9(c+8)A^2X-54(c+2)A^3](l_1-l_2)(n_1-n_2)\\ &+2[(c-4)X-18(3c-2)A]H(l_1-l_2)(n_1-n_2)\\ &+[-8cX^3-4(5c-14)AX^2+36(c+2)A^2X+54(5c-2)A^3](n_1-n_2)^2\\ &+[-4(7c+2)X+18(c+6)A]H(n_1-n_2)^2. \end{aligned} \right.$$

Un'espressione analoga si ottiene per G'; e precisamente, se nel secondo membro dell'espressione ora trovata si cambia c in c' e si cambiano le l_1, l_2, n_1, n_2 rispettivamente in l'_1, l'_2, n'_1, n'_2 si ottiene la espressione di $-240(c'-c)G'$; come è facile persuadersi, ritornando sui calcoli fatti ed osservando che è lecito dappertutto fare i detti cambiamenti, conservando inalterati A, H, X.

54. — *Espressione di J mediante A, X, X_1, X_2.*

Sommando membro a membro l'ultima equazione colla analoga che se ne deduce coi cambiamenti sopra detti, si ha:

$$(168)\quad \left\{ \begin{aligned} &\qquad\qquad -240(c-c')(G-G')\\ &=21A^2X^3-378A^3X^2-\frac{3969}{2}A^4X-3591A^5\\ &-[6X^3+72AX^2-\frac{459}{2}A^2X+1179A^3]H-(45X+270A)H^2\\ &+[X^3+3AX^2+12HX+(18HA-24A^3)]B_{11}\\ &+[6AX^2+(-3H+27A^2)X+(18HA+42A^3)]C_{11}\\ &+2[-X^3-14AX^2-(4H+72A^2)X-(36HA+108A^3)]B_{12}\\ &+2[8AX^2+(H-9A^2)X+(54HA-54A^3)]C_{12}\\ &+[56AX^2-(8H-72A^2)X+(108HA-108A^3)]B_{22}\\ &+[-8X^3-20AX^2-(28H-108A^2)X+(18HA+270A^3)]C_{22}, \end{aligned} \right.$$

dove è stato posto, per abbreviare:

$$B_{11} = (l_1 - l_2)^2 + (l'_1 - l'_2)^2,$$
$$B_{12} = (l_1 - l_2)(n_1 - n_2) + (l'_1 - l'_2)(n'_1 - n'_2),$$
$$B_{22} = (n_1 - n_2)^2 + (n'_1 - n'_2)^2,$$
$$C_{11} = c(l_1 - l_2)^2 + c'(l'_1 - l'_2)^2,$$
$$C_{12} = c(l_1 - l_2)(n_1 - n_2) + c'(l'_1 - l'_2)(n'_1 - n'_2),$$
$$C_{22} = c(n_1 - n_2)^2 + c'(n'_1 - n'_2)^2.$$

Ci proponiamo ora di esprimere le B e le C mediante A, X, X_1, X_2. A questo scopo ricaviamo dalle (154) e (156)

$$(l_1 - l_2)^2 = -\frac{c}{8}(\nu_2^2 X_1^2 + 6 X_1 X_2 + \nu_1^2 X_2^2),$$
$$(l_1 - l_2)(n_1 - n_2) = -\frac{c}{8}(-\nu_2 X_1^2 + 4 c X_1 X_2 - \nu_1 X_2^2),$$
$$(n_1 - n_2)^2 = -\frac{c}{8}(X_1^2 - 2 X_1 X_2 + X_2^2),$$
$$(l'_1 - l'_2)^2 = \frac{c'}{8}(\nu'^2_2 X_1^2 - 6 X_1 X_2 + \nu'^2_1 X_2^2),$$
$$(l'_1 - l'_2)(n'_1 - n'_2) = \frac{c'}{8}(-\nu'_2 X_1^2 - 4 c' X_1 X_2 - \nu'_1 X_2^2),$$
$$(n'_1 - n'_2)^2 = \frac{c'}{8}(X_1^2 + 2 X_1 X_2 + X_2^2);$$

osserviamo inoltre che per i valori di ν_1, ν_2, ν'_1, ν'_2 (n° 49) si ha

$$\nu_\alpha - \nu'_\alpha = 2(c - c') \mp \sqrt{3},$$
$$c\nu_\alpha - c'\nu'_\alpha = c - c' \pm \sqrt{3},$$
$$2c^2\nu_\alpha - 2c'^2\nu'_\alpha = -3(c - c') \pm 3\sqrt{3},$$
$$\nu_\alpha^2 - \nu'^2_\alpha = 4(c - c') \pm 4\sqrt{3},$$
$$c\nu_\alpha^2 - c'\nu'^2_\alpha = -3(c - c') \pm 6\sqrt{3},$$
$$2c^2\nu_\alpha^2 - 2c'^2\nu'^2_\alpha = -11(c - c') \mp 2\sqrt{3},$$

dove il segno superiore di $\sqrt{3}$ corrisponde all'indice $\alpha = 1$ ed il segno inferiore all'indice $\alpha = 2$. Col mezzo delle formole ora scritte ricaviamo

$$8 B_{11} = 3(c - c')(X_1^2 + X_2^2) - 3 X_1 X_2 + 6\sqrt{3}(X_1^2 - X_2^2),$$
$$16 C_{11} = 11(c - c')(X_1^2 + X_2^2) + 21 X_1 X_2 - 2\sqrt{3}(X_1^2 - X_2^2),$$
$$8 B_{12} = (c - c')(X_1^2 + X_2^2) + 7 X_1 X_2 - \sqrt{3}(X_1^2 - X_2^2),$$
$$16 C_{12} = -3(c - c')(X_1^2 + X_2^2) + 11 X_1 X_2 - 3\sqrt{3}(X_1^2 - X_2^2),$$
$$8 B_{22} = -(c - c')(X_1^2 + X_2^2) + X_1 X_2,$$
$$16 C_{22} = -(c - c')(X_1^2 + X_2^2) - 7 X_1 X_2;$$

infine, tenendo presenti le (161) e (158), abbiamo

$$15\,B_{11}=6X^2+18AX+81A^2+3.30H+\frac{45}{4}\sqrt{3}(X_1^2-X_2^2),$$

$$30\,C_{11}=18X^2-6AX-27A^2+11.30H-\frac{15}{4}\sqrt{3}(X_1^2-X_2^2),$$

$$15\,B_{12}=X^2-12AX-54A^2+30H-\frac{15}{8}\sqrt{3}(X_1^2-X_2^2),$$

$$30\,C_{12}=-7X^2-36AX-162A^2-3.30H-\frac{45}{8}\sqrt{3}(X_1^2-X_2^2),$$

$$15\,B_{22}=-2X^2-6AX-27A^2-30H,$$

$$30\,C_{22}=-X^2+12AX+54A^2-30H;$$

le ultime due di queste formole si possono anche ricavare direttamente dalla (160) e da quella che si deduce dalla (160) collo scambio di n_1, n_2, c in n'_1, n'_2, c'.

Ora ritornando alla (168), osserviamo che il primo membro, in virtù della (117), si può scrivere

$$\begin{aligned}-240(c-c')(G-G')&=-24J+120(G+G')\\&=-24J-6H^2A+36HA^3+306A^5,\end{aligned}$$

sostituiamo nel secondo membro alle B e C le espressioni ultimamente trovate, sviluppiamo i calcoli e giungiamo al risultato seguente:

$$(169)\quad\left\{\begin{aligned}-3J=&\frac{1}{15}X^5-AX^4-A^2X^3-39A^3X^2-114A^4X-\frac{2529}{10}A^5\\&+[X^3-25AX^2-183A^3]H+\frac{1}{2}[4X-165A]H^2\\&+\frac{1}{8}\sqrt{3}[X^3+2AX^2+18A^2X+24A^3+10HX](X_1^2-X_2^2)\end{aligned}\right.$$

che dà l'espressione cercata di J mediante gli invarianti fondamentali A, X, X_1, X_2 di G_{36}, quando in funzione di questi si supponga già calcolato H col mezzo della formola (161).

55. — *La risolvente di 10° grado del problema delle forme in G_{1080}.*

Supponiamo ora inversamente dati gli invarianti A, H, J di G_{360} e proponiamoci di calcolare gli invarianti X, X_1, X_2 di G_{36}.

Cominciamo a formare l'equazione che serve a calcolare la X. A questo scopo basterà nell'equazione (169) isolare il termine con $X_1^2-X_2^2$,

indi quadrare i due membri e sostituire per $(X_1^2 - X_2^2)^2$ la espressione data dalla (162).

In questo modo, se si pone per brevità

$$(170)\quad \begin{cases} Q_3 = X^3 + 2AX^2 + 2(5H + 9A^2)X + 24A^3, \\ Q_4 = X^4 + 6AX^3 + 3(10H + 17A^2)X^2 + 12(5H + 18A^2)AX \\ \quad + 6(40H^2 + 45HA^2 + 81A^4), \\ Q_5 = X^5 - 15AX^4 + 15(H - A^2)X^3 - 15(25H + 39A^2)AX^2 \\ \quad + 30(H^2 - 57A^4)X + \frac{9}{2}(10J - 275H^2A - 610HA^3 - 843A^5), \end{cases}$$

si trova l'equazione

$$(171)\qquad Q_5^2 + 3Q_4Q_3^2 = 0,$$

che è del 10° grado in X, ed è una risolvente del problema delle forme per il gruppo di sostituzioni G_{1080}. Le 10 radici di questa equazione sono i 10 valori, che prende la X quando si applicano tali sostituzioni, sono cioè

$$X^{(i)} = (1 - 4c)\xi_i - (1 + 2c)A, \qquad (i = 0, 1, \ldots, 9)$$

dove le ξ_i sono le espressioni scritte per disteso al n° 49.

Per formare una risolvente di 10° grado, invece della funzione X da noi scelta, si sarebbe potuto assumere come incognita uno qualunque degli invarianti assoluti del G_{36} (che non sia però invariante di G_{1080}); le risolventi di 10° grado più semplici si ottengono scegliendo per incognita uno degli invarianti assoluti del grado più basso del G_{36}, che sono quelli di 6° grado e sono della forma $aA + bX$, con a, b costanti arbitrarie; dunque tutte le risolventi più semplici di 10° grado si ricavano da quella sopra formata colla trasformazione: $Y = aA + bX$. In particolare per $a = \frac{1}{5}(2c - 3)$, $b = \frac{1}{15}(4c - 1)$ si ricava la risolvente che ha per radici le ξ_i; per $a = 9$, $b = 1$, si assume per incognita quell'invariante che, uguagliato a zero, dà l'equazione complessiva delle due cubiche armoniche trasformate in sè da un G_{36}; in questo caso la risolvente è:

$$(172)\qquad R_5^2 + 3R_4R_3^2 = 0,$$

essendo:

$$
(173)\quad \left\{ \begin{aligned}
R_3 &= Y^3 - 25AY^2 + 5(2H + 45A^2)Y - 15(6H + 47A^2)A,\\
R_4 &= Y^4 - 30AY^3 + 15(2H + 25A^2)Y^2\\
&\quad - 240(2H + 9A^2)AY + 60(2H + 9A^2)^2,\\
R_5 &= Y^5 - 60AY^4 + 15(H + 89A^2)Y^3 - 60(13H + 246A^2)AY^2\\
&\quad + 15(2H^2 + 693HA^2 + 5448A^4)Y\\
&\quad + \frac{45}{2}(2J - 67H^2A - 1958HA^3 - 8103A^5).
\end{aligned} \right.
$$

Il termine noto di quest'altra risolvente si spezza nel prodotto di due invarianti di 30° ordine

$$2J - (67 \pm 48i\sqrt{5})H^2A - (1958 \pm 592i\sqrt{5})HA^3 - (8103 \pm 1692i\sqrt{5})A^5,$$

che uguagliati a zero rappresentano le due decuple di cubiche armoniche corrispondenti ai 10 sottogruppi G_{36}.

Ritorniamo alla risolvente di 10° ordine formata prima; consideriamo un gruppo di 360 punti trasformato in sè dal G_{360} e non situato sulla curva $A = 0$; esso sia dato mediante i parametri λ e μ (n° 43). In ciascuno dei 10 gruppi G_{36} pensiamo il fascio di sestiche $X - \rho A = 0$ e nel fascio quella sestica, che contiene 36 dei 360 punti prima considerati; l'equazione di 10° grado, che determina i parametri ρ di tali sestiche, si deduce semplicemente dalla (171) ponendo in questa $A = 1$, $H = \lambda$, $J = \mu$, $X = \rho$; sviluppando i calcoli per ordinarla rispetto alle potenze di ρ, si trova:

$$
\left\{ \begin{aligned}
0 &= 4\rho^{10} + 180(\lambda + 3)\rho^8 + 180(-\lambda + 9)\rho^7\\
&\quad + 135(23\lambda^2 + 154\lambda + 207)\rho^6\\
&\quad + 9(10\mu - 305\lambda^2 + 4050\lambda + 13503)\rho^5\\
&\quad + 1350(-\mu + 18\lambda^3 + 205\lambda^2 + 504\lambda + 537)\rho^4\\
&\quad + 135[10(\lambda - 1)\mu - 95\lambda^3 + 1565\lambda^2 + 13827\lambda + 20031]\rho^3\\
&\quad + 135[-10(25\lambda + 39)\mu + 540\lambda^4 + 9395\lambda^3 + 31335\lambda^2 + 55113\lambda + 63873]\rho^2\\
&\quad + 270[10(\lambda^2 - 57)\mu - 275\lambda^4 + 670\lambda^3 + 18576\lambda^2 + 40338\lambda + 54099]\rho\\
&\quad + 2025\mu^2 - 405(275\lambda^2 + 610\lambda + 843)\mu\\
&\quad + \frac{81}{4}(75625\lambda^4 + 335500\lambda^3 + 856230\lambda^2 + 1051500\lambda + 752121).
\end{aligned} \right.
$$

Quando poi si tratta d'un gruppo speciale di punti, situato sulla curva $A = 0$ e dato mediante il parametro θ (n° 43), considereremo in ciascuno dei 10 gruppi G_{36} il fascio di curve di 12° ordine $X^2 - \rho^2 H = 0$ (escludendo il valore $\rho = \infty$ corrispondente al gruppo di punti H) e nel fascio quella curva, che passa per 36 dei 360 punti; allora dalla (171) si

ricava la seguente equazione di 10° grado in ρ:

$$(175)\;(\rho^5+15\rho^3+30\rho+45\sqrt{\theta})^2+3\rho^2(\rho^2+10)^2(\rho^4+30\rho^2+240)=0,$$

o per disteso:

$$(175')\qquad \begin{aligned}&4\rho^{10}+180\rho^8+3105\rho^6+90\sqrt{\theta}\rho^5+24300\rho^4\\ &+1350\sqrt{\theta}\rho^3+72900\rho^2+2700\sqrt{\theta}\rho+2025\,\theta=0,\end{aligned}$$

che si può anche scrivere

$$(175'')\qquad \rho^2(2\rho^4+45\rho^2+270)^2+2\,\theta'(\rho^4+15\rho^2+30)\rho+\theta'^2=0,$$

ove si è posto $\theta'=45\sqrt{\theta}$ *).

Quando finalmente si ha insieme $A=0$, $H=0$, caso rimasto escluso, trattandosi dei punti H, è facile calcolare in essi i valori delle ξ, che sono [ad es. in $H'_{(123456)}$ (n° 47)]:

$$\begin{array}{lllll}\xi_0=\varepsilon\eta^3, & \xi_1=\varepsilon\eta^4, & \xi_2=\varepsilon, & \xi_3=\varepsilon\eta, & \xi_4=\varepsilon\eta^2,\\ \xi_5=\varepsilon^2\eta, & \xi_6=\varepsilon^2\eta^2, & \xi_7=\varepsilon^2\eta^3, & \xi_8=\varepsilon^2\eta^4, & \xi_9=\varepsilon^2;\end{array}$$

l'equazione cui questi soddisfano è: $\xi^{10}+\xi^5+1=0$; da essa, essendo ora $X=(1-4c)\xi$, si trae l'equazione in X

$$X^{10}+15^2(1-4c)X^5-15^5=0,$$

che concorda colla (171), quando in questa si ponga, insieme a $A=0$, e $H=0$, anche $J=10(1-4c)$ per le (115).

A verificare l'esattezza dei coefficienti numerici delle equazioni (174) e (175) si possono utilmente adoperare (cfr. n° 48) i gruppi dei poli di G_{360}. Così nel punto $V_{(34)(56)}$ è facile calcolare i valori

$$\xi_1=\xi_3=0,\quad -\xi_0=\xi_4=-\xi_5=\xi_8=2c+1,\quad -\xi_2=\xi_6=\xi_7=-\xi_9=i(2c'+1),$$

che soddisfano all'equazione

$$[\xi^4+3(1-4c)\xi^2-36]^2\xi^2=0,$$

e siccome in un punto V si ha $X=(1-4c)\xi$, $H=2(4c-1)$, così è $\rho^2=\frac{1}{2}(4c-1)\xi^2$, per guisa che l'equazione precedente diventa

$$\rho^2(2\rho^4+45\rho^2+270)^2=0,$$

che concorda colla (175″) quando si pone $\theta=0$, che è il valore di θ corrispondente ai punti V.

Ancora, in un punto K è facile calcolare i valori

$$\xi_0=\xi_1=\xi_2=\xi_3=\xi_4=\frac{1}{5}(-9-12\omega+2c),$$

$$\xi_5=\xi_6=\xi_7=\xi_8=\xi_9=\frac{1}{5}(-9-12\omega'+2c),$$

---

*) Qui è da ripetere un'osservazione analoga a quella già fatta in nota a proposito dell'equazione (126).

dai quali si deducono i valori

$$\rho_0=\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=-\rho_5=-\rho_6=-\rho_7=-\rho_8=-\rho_9=6(1+2\varepsilon)$$

che sono radici dell'equazione

$$(\rho^2+108)^5=0;$$

a questa equazione si riduce appunto la (174), quando si ponga in essa $\lambda=9$, $\mu=-\frac{12624}{5}$, valori di λ e μ che competono ai punti K(n° 43).

Similmente, visto che i valori delle ξ nel punto $U_{(12)(56)}$ sono

$$\xi_0=\xi_5=-2c,\ \xi_1=\xi_3=\xi_4=\xi_8=-(1+c'),\ \xi_2=\xi_6=\xi_7=\xi_9=c,$$

e quindi i valori delle ρ nel punto medesimo sono

$$\rho_0=\rho_5=-9,\ \rho_1=\rho_3=\rho_4=\rho_8=3(1-c'),\ \rho_2=\rho_6=\rho_7=\rho_9=3(1-c),$$

si conclude che la (174) per i valori $\lambda=-\frac{9}{2}$, $\mu=\frac{2595}{8}$, che competono ad un punto U, si deve ridurre all'equazione

$$(\rho+9)^2(2\rho^2-9\rho+27)^4=0,$$

che ha per radici quei valori di ρ; ciò che appunto si verifica.

56. — *Relazioni tra la risolvente di 10° e quelle di 6° grado.*

Il gruppo di Galois per la risolvente di 10° grado (171) è isomorfo al G_{360}; esso è un notevole gruppo di permutazioni di 10 cose, generato dalle

$$(01234)(56789) \quad \text{e} \quad (153)(294)(687)$$

prodotte negli indici delle X dalle due sostituzioni Z e T eseguite sulle f_i.

Quando di detta risolvente si conosca una radice, il suo gruppo di Galois si riduce ad un gruppo isomorfo al gruppo G_{36} di collineazioni, e quindi le altre nove radici si debbono poter calcolare per radicali; come si effettui questo calcolo risulta da quanto segue.

Supponiamo che sia noto un valore di X e che per esso non si annulli il polinomio Q_3 (170); allora colle formole (161), (169), che hanno servito ad esprimere H e J in funzione degli invarianti di G_{36}, si determinano i valori di X_1^2 e di X_2^2; indi si ottengono con estrazioni di radici quadrate due valori opposti sia per X_1, sia per X_2, il che è di accordo col fatto che le forme X_1, X_2 sono in G_{36} invarianti relativi, i quali per le sostituzioni di G_{36} sono suscettibili di due valori opposti; ma fissato il valore di X_1 resta individuato quello di X_2 in virtù della (158).

Ciò posto, se oltre al noto valore di X si aggiunge al campo di razionalità uno dei due valori di X_1, siccome X_1 appartiene al gruppo G_{18}, così il gruppo di Galois della risolvente si abbassa ad un gruppo isomorfo al G_{18}. Siccome poi il G_{18} è (n° 22) isomorfo ad un gruppo intransitivo di permutazioni tra le f_i^3, per cui tre di queste si permutano tra loro e le altre tre pure tra loro; così, quando sia nota una radice della risolvente di 10° grado e inoltre si sia fatta una estrazione di radice quadrata, il primo membro della risolvente di 6° grado (125) o (126) si deve poter spezzare nel prodotto di due fattori cubici. Precisamente, dati A, H, J e supposto noto un valore di X, e quindi di ξ mediante la (157), saranno noti $l_1 + l_2$ ed $n_1 + n_2$; si fissi, come si è detto, una coppia di valori per X_1 e X_2, e allora col mezzo delle (154) si avranno anche $l_1 - l_2$ ed $n_1 - n_2$; perciò saranno noti l_1, l_2, n_1, n_2; poscia le (165), (166) faranno conoscere m_1, m_2. Si vede facilmente che, scambiando una coppia di valori di X_1, X_2 colla coppia di valori opposti, le l_1, m_1, n_1 si mutano nelle l_2, m_2, n_2 e viceversa. Note che siano le l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2 segue, per la loro stessa definizione, che il primo membro della risolvente di 6° grado (125) o (126) rimane spezzato nel prodotto di due noti fattori di 3° grado:

$$(x^3 - l_1 x^2 + m_1 x - n_1^3)(x^3 - l_2 x^2 + m_2 x - n_2^3).$$

Ad ogni modo di scindere le sei radici x_i della (125) o (126) in due terne corrisponde una radice X della risolvente di 10° grado, come si vede tenendo presenti le espressioni delle ξ_i scritte per disteso al n° 48; ora abbiamo mostrato come, nota una radice X, per la quale non si annulli Q_3, si ottengano, mediante estrazione di radici quadrate e cubiche, le due terne corrispondenti di radici x_i.

Quando la radice X, che si suppone nota, è tale che per essa si annulla Q_3, in virtù della (171) si annulla anche Q_5; la (169), che si può scrivere

$$0 = 8\,Q_5 + 15\sqrt{3}\,Q_3(X_1^2 - X_2^2),$$

non serve a far conoscere $X_1^2 - X_2^2$. In tal caso, come si vede chiaramente dalla (171), il valore considerato di X è radice doppia della risolvente di 10° grado. Allora alla (169) sostituiamo la (162), e combinando questa insieme alla (161) ricaviamo per X_1^2 due valori, nella espressione dei quali entra $\sqrt{Q_4}$. Indi, seguendo il procedimento sopra indicato, concludiamo che, se per il noto valore di X si annulla Q_3, X è radice doppia della risolvente di 10° grado, e che, aggiungendo essa insieme a

due estrazioni di radici quadrate, il primo membro della (125) o (126) si spezza, in due modi diversi, nel prodotto di due fattori cubici.

Se della risolvente di 10° grado si conoscono due radici semplici $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ e con due estrazioni di radici quadrate si sono fissati i corrispondenti valori di X_1, il gruppo di Galois per la (125) o (126) si riduce ad un gruppo isomorfo a quello, che è intersezione di due dei dieci gruppi G_{18} e che, come si vede facilmente, è un gruppo binomio: $1, (\alpha\beta)(\gamma\delta)$. Per conseguenza due delle radici della risolvente di 6° grado si debbono calcolare razionalmente, e le altre quattro si debbono ottenere colla risoluzione di due equazioni quadratiche. Basta a questo scopo che formiamo le due equazioni cubiche corrispondenti alla radice $X^{(0)}$ e le due equazioni cubiche corrispondenti alla radice $X^{(1)}$; indi accoppiamo una qualunque delle prime due equazioni con una qualunque delle seconde e l'altra delle prime coll'altra delle seconde ed osserviamo che vi è una radice comune per le due equazioni di una coppia ed un'altra radice comune per le due equazioni dell'altra coppia, oppure vi sono due radici comuni alle due equazioni della prima coppia ed altre due radici comuni alle equazioni dell'altra coppia. Allo stesso modo si vede che due radici della risolvente di 6° grado si calcolano razionalmente, e le altre quattro si ottengono colla risoluzione di due equazioni quadratiche, quando della risolvente di 10° grado si conosce una radice doppia X, che annulla Q_3, e si son fatte le due estrazioni di radici quadrate, che allora occorrono per avere due valori (non opposti) di X_1.

Supporremo ora che si sia risoluta l'equazione di 6° grado (125) o (126); le radici $X^{(i)}$ della risolvente di 10° grado si possono calcolare mediante le espressioni

$$X^{(i)} = (1 - 4c)\xi_i - (1 + 2c)A,$$

che hanno loro servito di definizione; ma a questo scopo, per avere i valori delle ξ, bisogna prima calcolare le f_i, che sono le radici cubiche delle radici della (125) o (126); ora questa introduzione di estrazione di radici cubiche non è necessaria.

Le radici $X^{(i)}$ della risolvente di 10° grado si possono calcolare razionalmente, quando sono note le radici x_i della (125) o (126); basta calcolare i 10 valori, che assume la funzione

$$x_1 x_2 x_3 + x_4 x_5 x_6$$

per il gruppo G_{360} di permutazioni delle x, indi sostituire ciascuno di quei valori al posto di $n_1^3 + n_2^3$ nella (163); si ha così ogni volta un'e-

quazione di 3° grado in X, la quale ha una ed una sola radice *) comune colla risolvente di 10° grado, e però questa radice comune si può calcolare razionalmente.

Inversamente anche le radici delle risolventi di 6° grado si possono calcolare razionalmente, quando si conoscono tutte le radici $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(9)}$ della risolvente di 10° grado. A questo scopo osserviamo che le sostituzioni S e Z producono negli indici delle $X^{(i)}$ le permutazioni

$$(169)(237)(458), \qquad (01234)(56789)$$

e che queste trasformano in sè la funzione di 2° grado nelle $X^{(i)}$:

$$\begin{aligned} Y_1 = & X^{(0)}X^{(2)} + X^{(1)}X^{(3)} + X^{(2)}X^{(4)} + X^{(3)}X^{(0)} + X^{(4)}X^{(1)} \\ & + X^{(5)}X^{(6)} + X^{(6)}X^{(7)} + X^{(7)}X^{(8)} + X^{(8)}X^{(9)} + X^{(9)}X^{(5)} \\ & + X^{(0)}X^{(7)} + X^{(1)}X^{(8)} + X^{(2)}X^{(9)} + X^{(3)}X^{(5)} + X^{(4)}X^{(6)}; \end{aligned}$$

perciò questa funzione è un invariante di 12° grado per il gruppo icosaedrico generato dalle S e Z, che lascia ferma la conica (1); quindi essa deve potersi esprimere nella maniera seguente (cfr. n° 46):

$$Y_1 = \alpha x_1^2 + \beta A x_1 + \gamma H + \delta A^2,$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono coefficienti numerici da determinare. A questo scopo sostituiamo alcuni dei poli di G_{360}, tenendo presenti le (86) — (91).

Nel punto $H'_{(31456)} = T H'_{(23456)}$ si ha:

$$A = 0, \qquad H = 0, \qquad x_1 = \eta, \qquad Y = 60\, c'^2 \eta^2;$$

quindi si ricava

$$\alpha = 60\, c'^2.$$

Nel punto $V'_{(34)(56)}$ si ha:

$$A = 0, \quad H = 2(4c - 1), \quad x_1 = -2ci(\varepsilon^2 - \omega), \quad Y_1 = -180c;$$

$$-180\, c = -8\, c^3 \alpha + 2(4c - 1)\gamma;$$

si deduce

$$\gamma = -10(c - 4).$$

Nel punto $P_{31,2} = T P_{23,1}$ si ha:

$$A = 1, \qquad H = c' - 1, \qquad x_1 = 0, \qquad Y_1 = 90\, c';$$

$$90\, c' = (c' - 1)\gamma + \delta;$$

si deduce

$$\delta = 15(5 - 4c).$$

---

*) Una sola; altrimenti cercando le radici X comuni alla risolvente (171) e a ciascuna delle 10 equazioni di 3° grado, una qualche radice $X^{(i)}$ si troverebbe più d'una volta; cioè per due o più valori diversi del primo membro la (163) dovrebbe essere soddisfatta da uno stesso valore di X; ciò che non può essere.

Nel punto $K_{(23456)}$ si ha:

$$A = 1, \quad H = 9, \quad x_1 = 5, \quad Y_1 = -540;$$

$$-540 = 25\alpha + 5\beta + 9\gamma + \delta;$$

si deduce

$$\beta = 30(1 + 6c) \text{ *)}.$$

Dunque concludiamo che per le risolventi generali ($A \neq 0$) si ha:

$$(176)\quad c^2 Y = 60x^2 - 120(c+1)x + \frac{5}{2}(11c - 14)\lambda + \frac{15}{2}(11c - 6),$$

dove Y è uno dei sei valori, che prende la funzione Y_1, se al posto delle $X^{(i)}$ si sostituiscono le radici della risolvente di 10° grado (174), ed x è una delle radici della risolvente di 6° grado (125). Quindi, se è stata risoluta quella di 10° grado, per avere le radici di quella di 6° grado basta per ogni valore di Y trovare la radice comune alle equazioni (125) e (176), ciò che si fa razionalmente.

Nel caso delle risolventi speciali ($A = 0$), alla (176) bisogna sostituire l'equazione

$$(176^{\text{bis}})\qquad 2Y = (14c - 11)x^2 + 20(4 - c),$$

dove Y è uno dei valori che prende Y_1, quando al posto delle $X^{(i)}$ si sostituiscono le radici della risolvente speciale di 10° grado (175); si tratta allora di trovare la radice x comune alle equazioni (126) e (176^{bis}).

Tutto quanto abbiamo detto, confrontando la risolvente di 10° grado (171) colla risolvente di 6° grado (125) o (126), s'intende ripetuto confrontando la stessa (171) coll'altra risolvente (125') o (126'); con questa differenza che, quando si è detto di ricorrere alla (154), bisogna invece ricorrere alla (156), e quando si è detto di ricorrere alle (157), (163), (165), (166), (176) bisogna invece ricorrere alle analoghe equazioni, che

*) Sommando i sei valori che assume Y_1, quando si applicano le sostituzioni del G_{1080}, si ricava

$$2\sum^{i}\sum^{k} X^{(i)}X^{(k)} = \alpha\sum^{i} x_i^2 + \beta A\sum^{i} x_i + 6\gamma H + 6\delta A^2;$$

ora

$$\sum x_i = 6(c+1)A, \qquad \sum x_i^2 = 24cA^2 - 2(c-1)H,$$

$$\sum X^{(i)}X^{(k)} = 45(H + 3A^2);$$

dunque, confrontando i termini in H e A^2, si hanno le equazioni

$$90 = 6\gamma - 2(c-1)\alpha,$$

$$270 = 24c\alpha + 6(c+1)\beta + 6\delta,$$

che confermano i valori sopra trovati di α, β, γ, δ.

si deducono col cambiamento di c in c', ξ in ξ', delle l, m, n nelle l', m', n'; e di Y_1 in

$$\begin{aligned} Y_1' = & X^{(0)}X^{(1)} + X^{(1)}X^{(2)} + X^{(2)}X^{(3)} + X^{(3)}X^{(4)} + X^{(4)}X^{(0)} \\ & + X^{(0)}X^{(7)} + X^{(1)}X^{(8)} + X^{(2)}X^{(9)} + X^{(3)}X^{(5)} + X^{(4)}X^{(6)} \\ & + X^{(5)}X^{(7)} + X^{(6)}X^{(8)} + X^{(7)}X^{(9)} + X^{(8)}X^{(5)} + X^{(9)}X^{(6)}; \end{aligned}$$

la Y_1' è un invariante di 12° grado per il gruppo icosaedrico che lascia ferma la conica (1'), come si vede facilmente ricordando (n° 36) che questo gruppo è generato dalle Z e T^2S e osservando che queste sostituzioni producono negli indici delle $X^{(i)}$ le permutazioni

$$(01234)(56789), \qquad (174)(256)(389).$$

Le equazioni (174) e (175) sono una classe di equazioni di 10° grado notevolissima per questo, che sono risolubili col mezzo di equazioni di 6° grado e contengono essenzialmente: due parametri λ, μ la (174) e un parametro θ la (175); esse hanno, come si è visto, la proprietà che, quando se ne conosce una radice, le altre si calcolano coll'estrazione di radicali quadrati e cubici.

(Continua).

Faldo, agosto 1899.

F. GERBALDI.

STUDII DI ANALISI *).

Note di F. Bucca, in Palermo.

Adunanza del 23 luglio 1899.

I.

Sullo sviluppo degli integrali d'un'equazione differenziale lineare omogenea nell'intorno d'un punto singolare.

1. Sia

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_{m-1} \frac{dy}{dx} + p_m y = 0 \tag{1}$$

un'equazione differenziale lineare ed omogenea, in cui i coefficienti p_1, $p_2, \ldots, p_m$ si suppongono funzioni della variabile complessa x, date in una certa regione E del piano a contorno semplice, uniformi, regolari, tranne in punti isolati, dove qualcuna delle funzioni p (od anche tutte) ha singolarità polare. Questi punti si dicono i *punti singolari* dell'equazione differenziale.

È noto che ogni integrale dell'equazione (1) non può avere altri punti singolari che quelli dell'equazione stessa; nell'intorno di un punto della regione E, in cui tutte le funzioni p sono regolari, è un integrale

*) Sotto questo titolo pubblicheremo, qui raccolti, gli ultimi scritti del compianto Socio Dr. Fortunato Bucca, che giovanissimo ebbe da malattia inesorabile troncati, colla vita, quegli studi ai quali si era dedicato con amore indefesso, dando prova di una non comune intelligenza.

La Redazione.

qualsiasi della (1) sviluppabile in serie di potenze convergente in quell'intorno.

Sia a un punto singolare dell'equazione (1), e $y_1, y_2, \dots, y_m$ un sistema fondamentale di integrali definito in una certa area vicina ad a e non contenente questo punto. Partendo da un punto x_0 di quest'area e facendo descrivere alla variabile x un cammino chiuso attorno ad a, troveremo, come si sa, un altro sistema fondamentale di integrali Y_1, $Y_2, \dots, Y_m$ che è legato al sistema y da una sostituzione lineare:

$$\begin{cases} Y_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1m} y_m \\ Y_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2m} y_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_m = a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \dots + a_{mm} y_m. \end{cases}$$

È nota l'importanza dell'equazione di grado m in μ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \mu & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} - \mu \end{vmatrix} = 0$$

e si sa che le sue radici sono invarianti, cioè non dipendono dal sistema fondamentale scelto $y_1, y_2, \dots, y_m$.

Due casi si distinguono nella teoria delle equazioni differenziali lineari; il primo è quello in cui l'equazione precedente ha le radici distinte; il secondo è quello in cui l'equazione stessa ha radici multiple.

Nel 1° caso, dette $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ le m radici dell'equazione, si dimostra che esistono m integrali dell'equazione differenziale (1), formanti sistema fondamentale, i quali nel giro attorno ad a si riproducono moltiplicati rispettivamente per $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

Nel secondo caso, posto che μ_1 sia radice multipla secondo α, μ_2 multipla secondo β, etc., si dimostra *) che è possibile determinare un sistema fondamentale di integrali

$$x_1, x_2, \dots x_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha+\beta}, \dots$$

i quali, girando attorno ad a, subiscono la seguente sostituzione lineare:

---

*) Cfr. Picard, *Traité d'Analyse*, v. III, pag. 259.

$$(2)\qquad\begin{cases} x_1 & \mu_1 x_1 \\ x_2 & \mu_1 x_2 + \lambda_{11} x_1 \\ x_3 & \mu_1 x_3 + \lambda_{12} x_2 + \lambda_{22} x_1 \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_\alpha & \mu_1 x_\alpha + \lambda_{1,\alpha-1} x_{\alpha-1} + \ldots + \lambda_{\alpha-1,\alpha-1} x_1 \end{cases}$$

completata da espressioni analoghe per gli altri gruppi di radici.

Questa sostituzione lineare è quella che il Picard ha scelto come sostituzione *fondamentale canonica;* altri autori scelgono come sostituzione canonica un'altra *), e di essa si servono per la determinazione della forma degli integrali nell'intorno del punto singolare a **).

Il Picard, nel n° 7 del Capitolo XI del citato volume (p. 260), trova la forma analitica degli integrali nelle vicinanze del punto singolare a, non servendosi della sostituzione lineare, bensì mediante un altro metodo, senza chiarire poi in ultimo che gli integrali, dei quali egli ha trovato l'espressione analitica, son poi quelli che nel giro attorno ad a subiscono la sostituzione canonica (2). Si potrebbe completare ciò che il Picard lascia sospeso, come fa l'Heffter ***); ma noi, in questa nota, mostreremo come, servendosi della forma della sostituzione lineare (2), seguendo perciò un metodo conforme a quello tenuto da altri autori, si possa ottenere la forma analitica degli integrali $x_1, x_2, \ldots, x_m$ nell'intorno del punto singolare a.

2. Cominciamo dall'osservare che la funzione

$$D\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

(D è il simbolo di derivazione) è uniforme nell'intorno del punto a; infatti, per un giro attorno ad a, la funzione $\frac{x_2}{x_1}$ si cangia in

$$\frac{\mu_1 x_2 + \lambda_{11} x_1}{\mu_1 x_1} = \frac{x_2}{x_1} + \frac{\lambda_{11}}{\mu_1}$$

e però $D\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ resta uniforme nel giro attorno ad a.

---

*) Cfr. Jordan, *Cours d'Analyse*, v. III, pag. 173.

**) Cfr. Jordan, l. c.; Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Bd. I, S. 134.

***) *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Kapitel VII.

Inoltre la funzione $D\left(\frac{x_3}{x_1}\right)$, nel giro attorno ad a, si cangia in

$$D\left(\frac{x_3}{x_1}\right)+\frac{\lambda_{12}}{\mu_1}D\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

cioè subisce una trasformazione analoga a quella che subisce la funzione x_2 nel giro attorno ad a, coll'avvertenza che adesso la funzione $D\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ fa le veci di x_1. Ed allora come dalle funzioni x_1, x_2 ricavammo la $D\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ che è uniforme in a, così dalle due funzioni

$$D\left(\frac{x_3}{x_1}\right) \quad \text{e} \quad D\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

ricaviamo la funzione

$$\text{(I)} \qquad D\frac{D\left(\frac{x_3}{x_1}\right)}{D\left(\frac{x_2}{x_1}\right)},$$

che resta uniforme nell'intorno di a.

Consideriamo ancora la funzione

$$D\left(\frac{x_4}{x_1}\right),$$

la quale, nel giro attorno ad a, si cangia in

$$D\left(\frac{x_4}{x_1}\right)+\frac{\lambda_{13}}{\mu_1}D\left(\frac{x_3}{x_1}\right)+\frac{\lambda_{23}}{\mu_1}D\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

cioè subisce una trasformazione analoga a quella che subisce x_3; qui $D\left(\frac{x_3}{x_1}\right)$ e $D\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ fan le veci di x_2 e di x_1. Deduciamo da

$$D\left(\frac{x_4}{x_1}\right),\quad D\left(\frac{x_3}{x_1}\right),\quad D\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

con un processo analogo a quello mediante il quale da

$$x_3,\quad x_2,\quad x_1$$

ottenemmo la funzione (I), una nuova funzione; questa è uniforme in a, e come è facile vedere, è rappresentata dal simbolo

$$(\mathrm{II}) \qquad D\frac{D\dfrac{D\left(\dfrac{x_4}{x_1}\right)}{D\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}}{D\dfrac{D\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)}{D\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}}.$$

Immaginiamo che si proceda in questo modo; si sottopongono, in fondo, le funzioni $x_1, x_2, \ldots, x_a$ ad uno speciale algoritmo (che la (I) e la (II) fan ben comprendere) per dedurre delle funzioni, quali le (I) e (II), che restano uniformi nel giro attorno ad a.

Ora tali funzioni, dedotte con questo speciale algoritmo, ci permettono di trovare la forma analitica delle funzioni primitive $x_1, x_2, \ldots, x_a$ nell'intorno del punto a.

3. Ricordiamo che se una funzione $\varphi(x)$ è uniforme nelle vicinanze del punto a, la funzione

$$\int \varphi(x)\,dx$$

ha in a una singolarità logaritmica, ed è, nelle vicinanze del punto a, rappresentabile nella seguente maniera:

$$\Phi(x-a) + A.\log(x-a),$$

Φ essendo una funzione uniforme in a, A il residuo di $\varphi(x-a)$ in a.

Consideriamo l'integrale

$$J = \int \chi.\log^m(x-a)\,dx,$$

dove χ è una funzione uniforme nelle vicinanze del punto a, ed m un intero positivo. È facile persuadersi, dopo un breve calcolo ed un'induzione *completa*, che esso può esprimersi così:

$$(3) \qquad \begin{aligned} J &= A + B\log(x-a) + C\log^2(x-a) + \ldots \\ &\ldots + E\log^m(x-a) + \frac{A_{-1}}{m+1}\log^{m+1}(x-a), \end{aligned}$$

in cui $A, B, C, \ldots, E$ sono funzioni uniformi nell'intorno del punto a, ed A_{-1} è il residuo della funzione χ nel punto a.

Invero, cominciamo dal supporre $m = 1$, cioè dal considerare l'integrale

$$I = \int \chi . \log(x - a)\, dx.$$

Essendo χ una funzione uniforme nell'intorno del punto a, è ivi rappresentabile colla serie di Laurent:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n A_n (x - a)^n.$$

Quindi avremo:

$$I = \int \log(x - a) \sum{}_n A_n (x - a)^n\, dx = \sum{}_n A_n \int (x - a)^n \log(x - a)\, dx.$$

Per $n \neq -1$ si ha, integrando per parti,

$$\int (x - a)^n \log(x - a)\, dx = \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}\left[\log(x - a) - \frac{1}{n + 1}\right].$$

Per $n = -1$ si ha

$$\int (x - a)^{-1} \log(x - a)\, dx = \frac{1}{2} \log^2(x - a).$$

Onde

$$I = \sum_{n \neq -1} \frac{A_n}{n + 1}(x - a)^{n+1}\left[\log(x - a) - \frac{1}{n + 1}\right]$$
$$+ \frac{A_{-1}}{2} \log^2(x - a) + \text{Cost.},$$

ossia

$$I = A + B \log(x - a) + \frac{A_{-1}}{2} \log^2(x - a),$$

A, B indicando delle funzioni uniformi nell'intorno nel punto a, A_{-1} è poi il residuo di $\chi(x - a)$ nel punto a.

Con ciò la formola (3) è dimostrata vera per $m = 1$. Ammettiamola pei valori $1, 2, \ldots, m$ e dimostriamo che è vera per $m + 1$.

Consideriamo perciò l'integrale

$$I' = \int \chi . \log^{m+1}(x - a)\, dx = \int \log(x - a) . \chi \log^m (x - a)\, dx.$$

Integrando per parti, prendendo $\log(x - a)$ come fattor finito e servendoci della (3), abbiamo:

$$(4)\left\{\begin{aligned} &I' = \log(x - a)\left[A + B\log(x - a) + \ldots + \frac{A_{-1}}{m + 1}\log^{m+1}(x - a)\right] \\ &- \int \left[A + B\log(x - a) + \ldots + E\log^m(x - a) + \frac{A_{-1}}{m + 1}\log^{m+1}(x - a)\right]\frac{dx}{x - a}. \end{aligned}\right.$$

Poichè la formola da dimostrare è stata ammessa vera per i valori $1, 2, \ldots, m$, l'integrale che comparisce nel 2° membro della (4) è esprimile così:

$$A' + B' \log(x - a) + \ldots + E' \log^m (x - a) + \alpha' \log^{m+1}(x - a)$$
$$- \frac{A_{-1}}{m+1} \int \log^{m+1}(x - a) \frac{dx}{x - a},$$

$A', B', \ldots, E'$ essendo funzioni uniformi, ed α' una costante. E però sarà

$$I' = A_1 + B_1 \log(x - a) + \ldots + E_1 \log^{m+1}(x - a)$$
$$+ \frac{A_{-1}}{m+1} \log^{m+2}(x - a) - \frac{A_{-1}}{m+1} \int \log^{m+1}(x - a) \frac{dx}{x - a}$$
$$= A_1 + B_1 \log(x - a) + \ldots + E_1 \log^{m+1}(x - a) + \frac{A_{-1}}{m+2} \log^{m+2}(x - a),$$

$A_1, B_1, \ldots, E_1$ essendo funzioni uniformi nell'intorno di a.

La formola (3) è così pienamente dimostrata.

4. Ritorniamo ora alle funzioni $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$.

Dall'essere la funzione $D\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ uniforme in a, deduciamo

$$\frac{x_2}{x_1} = \psi + c \log(x - a),$$

ψ funzione uniforme e c costante. Intanto la forma analitica di x_1 nelle vicinanze di a, è nota; in quanto che la sostituzione lineare (2) dice che x_1 nel giro attorno ad a si riproduce moltiplicata per μ_1, e perciò x_1 è, nell'intorno di a, rappresentabile in questo modo:

$$x_1 = (x - a)^{r_1} \varphi(x - a),$$

ove r_1 è una delle radici dell'equazione $\mu_1 = e^{2\pi i r_1}$, e $\varphi(x - a)$ una funzione uniforme nell'intorno di a. Segue che nelle vicinanze del punto a, si ha

$$x_2 = (x - a)^{r_1} [A + B \log(x - a)],$$

A e B funzioni uniformi in a, e $B = c\varphi(x - a)$.

Dall'essere poi uniformi le funzioni

$$D \frac{D\left(\frac{x_3}{x_1}\right)}{D\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \quad \text{e} \quad D\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

concludiamo

$$D\left(\frac{x_3}{x_1}\right) = \Theta + \chi \log(x - a),$$

Θ e χ funzioni uniformi; e di qui deduciamo che si ha

$$\frac{x_3}{x_1} = \Phi + c_1 \log(x - a) + \int \chi \log(x - a)\, dx,$$

Φ essendo una funzione uniforme, c_1 costante e precisamente il residuo di Θ in a.

Quindi, applicando la formola stabilita nel numero precedente, possiamo conchiudere:

$$x_3 = (x - a)^{r_1} [A + B \log(x - a) + C \log^2(x - a)],$$

in cui A, B, C sono tre funzioni uniformi nell'intorno di a, e dippiù $C = \alpha . \varphi(x - a)$, α essendo una costante.

Servendoci di un ragionamento induttivo, tenendo sempre presente il modo con cui son generate le funzioni uniformi analoghe alle (I) e (II), si conchiude che:

$$x_i = (x - a)^{r_1} [A_i + B_i \log(x - a) + \ldots + C_i \log^i(x - a)], \quad (i = 1, 2, \ldots, \alpha)$$

ove A_i, B_i, ..., C_i denotano delle funzioni uniformi nell'intorno del punto a; dippiù le funzioni

$$C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$$

stanno in un rapporto costante *).

Palermo, 1 aprile 1899.

II.

Sulla riduzione del gruppo di Galois d'un'equazione algebrica coll'aggiunzione di irrazionalità arbitrarie.

1. Nella teoria delle equazioni algebriche secondo Galois ha grande importanza il teorema sull'aggiunzione al corpo, in cui è data un'equazione algebrica, delle irrazionalità che il Kronecker chiama *irrazionalità naturali*, cioè le funzioni razionali delle radici dell'equazione data.

*) Cfr. Picard, l. c.

Detto teorema si enuncia così: *)

« *Ogni riduzione possibile del gruppo di* Galois *si ottiene coll'ag-* « *giunzione di un'irrazionalità naturale. Se j è l'indice del gruppo ridotto* « *rispetto al gruppo originario, la riduzione non si può ottenere coll'aggiun-* « *zione d'un corpo di grado più basso dell'j^{mo}. Il grado del corpo aggiunto* « *può essere uguale a j, allora la irrazionalità aggiunta è un'irrazionalità* « *naturale. Se il grado del corpo aggiunto è maggiore di j, esso è un mul-* « *tiplo di j* ».

Mi propongo in questa nota, di dare del teorema citato una dimostrazione molto semplice, facendo contemporaneamente qualche aggiunta e deducendone un corollario, che credo importante **).

Sia $f(x) = 0$ un'equazione algebrica di grado n, data in un corpo Ω, le cui radici indichiamo con $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; P sia il gruppo di Galois dell'equazione stessa nel corpo Ω, ed ε sia un'irrazionalità radice di un'equazione $\chi(u) = 0$ di grado m, irriducibile in Ω. Si supponga che coll'aggiungere ε al corpo Ω, il gruppo di Galois dell'equazione $f(x) = 0$ si riduca da P ad un suo divisore Q di indice j.

Considerando una grandezza ψ razionale nelle α, cioè un'irrazionalità naturale, appartenente al gruppo Q, ***) nel corpo $\Omega(\psi)$ il gruppo di Galois dell'equazione $f(x) = 0$ è il gruppo Q; e ψ soddisfa precisamente ad un'equazione $\varphi(y) = 0$, irriducibile in Ω, di grado j †); sicchè la riduzione del gruppo di Galois dell'equazione $f(x) = 0$ da P a Q possiamo ottenerla per mezzo dell'irrazionalità naturale ψ, e la prima parte del teorema è così subito dimostrata.

Poichè, intanto, anche nel corpo $\Omega(\varepsilon)$ il gruppo di Galois dell'equazione $f(x) = 0$, è Q, la grandezza ψ, che si può considerare come un'irrazionalità del corpo normale $\Omega(\varepsilon; \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, ammettendo le permutazioni di Q, deve stare in $\Omega(\varepsilon)$, ossia ψ è una funzione razionale di ε. Ciò vuol dire che il corpo $\Omega(\psi)$ è divisore del corpo $\Omega(\varepsilon)$, e però deve il grado j di $\varphi(y) = 0$, cioè il grado del corpo $\Omega(\psi)$, essere un divisore di m, che è il grado del corpo $\Omega(\varepsilon)$.

---

*) Cfr. Weber, *Lehrbuch der Algebra*. Bd. I, S. 516, ovvero pag. 594 della traduzione francese di Griess.

**) In questa nota sono seguite le notazioni e le denominazioni usate dal Weber nel trattato predetto.

***) Cfr. Weber, l. c., S. 491-492; ovvero pag. 566-567 della traduzione francese.

†) Cfr. Weber, l. c., S. 508; pag. 585 della traduzione francese.

Nè la riduzione del gruppo di Galois di $f(x)=0$ da P a Q può ottenersi con una irrazionalità η radice di un'equazione in Ω di grado i minore di j; perchè se ciò fosse, il corpo $\Omega(\psi)$ di grado j dovrebbe essere divisore del corpo $\Omega(\eta)$ di grado $i < j$, il che è impossibile.

Se $m = j$, il che accade p. es., se m è un numero primo, il corpo $\Omega(\psi)$ ed il corpo $\Omega(\varepsilon)$ son dello stesso grado; e poichè $\Omega(\psi)$ è un divisore di $\Omega(\varepsilon)$, sarà $\Omega(\psi) \equiv \Omega(\varepsilon)$, ed ε è perciò un'irrazionalità naturale.

Il teorema è così completamente dimostrato.

2. Supposto $m > j$, nel qual caso, come abbiamo visto, è $\frac{m}{j} = p$ un intero, il corpo $\Omega(\varepsilon)$ ha il divisore *proprio* $\Omega(\psi)$, e però il corpo $\Omega(\varepsilon)$ è *imprimitivo* *) e l'equazione irriducibile $\chi(u) = 0$ è *imprimitiva* **); ciò vuol dire che la grandezza *imprimitiva* $\psi = R(\varepsilon)$ del corpo $\Omega(\varepsilon)$ e i suoi valori conjugati si distribuiscono in j sistemi di valori eguali. Allora le radici di $\chi(u) = 0$ si distribuiscono in j serie di p elementi che denoteremo con

$$(1) \qquad \begin{cases} E = \varepsilon, & \varepsilon_1, \; \ldots, \; \varepsilon_{p-1} \\ H = \eta, & \eta_1, \; \ldots, \; \eta_{p-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ Z = \zeta, & \zeta_1, \; \ldots, \; \zeta_{p-1}, \end{cases}$$

per guisa che i valori conjugati di ψ sono

$$\begin{cases} \psi = R(\varepsilon) = R(\varepsilon_1) = \ldots = R(\varepsilon_{p-1}) \\ \psi_1 = R(\eta) = R(\eta_1) = \ldots = R(\eta_{p-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{j-1} = R(\zeta) = R(\zeta_1) = \ldots = R(\zeta_{p-1}). \end{cases}$$

Le j serie (1) sono i cosidetti *sistemi d'imprimitività*.

È chiaro che una qualunque delle grandezze della serie E aggiunta ad Ω dà la medesima riduzione; cioè riduce il gruppo di Galois di $f(x)=0$ da P a Q.

L'aggiunzione di una grandezza della serie H riduce il gruppo di $f(x) = 0$ da P ad un divisore Q' coniugato a Q, giacchè la medesima riduzione si potrà ottenere coll'aggiunzione della grandezza ψ_1 che è coniugata a ψ.

---

*) Cfr. Weber, l. c., S. 460; pag. 533 della traduzione francese.

**) Cfr. Weber, l. c., S. 485; pag. 560 della traduzione francese.

Ma se l'equazione $\chi(u) = 0$ è normale *), l'aggiunzione di ε equivale all'aggiunzione di η o di ζ, giacchè in tal caso, ε è funzione razionale di η o di ζ e viceversa $\eta, \ldots, \zeta$ sono funzioni razionali di ε; dunque allora l'aggiunzione di ψ equivale all'aggiunzione di una sua qualunque grandezza conjugata; vuol dire che il gruppo Q è identico ai suoi conjugati, cioè il gruppo Q è un divisore normale di P.

3\. Siano $G(t) = 0$ e $g(t) = 0$ due equazioni date in un corpo Ω, normali; α sia una radice di $G(t) = 0$, ε una radice di $g(t) = 0$; supponiamo che il gruppo P di Galois di $G(t) = 0$ si riduca da P a Q coll'aggiunzione di una radice ε di $g(t) = 0$; Q sarà (n° 2) un divisore normale di P; e, detta ψ una grandezza del corpo $\Omega(\alpha)$, appartenente a Q, sarà $\Omega(\psi)$ parte di $\Omega(\alpha)$ ed anche di $\Omega(\varepsilon)$.

Consideriamo il gruppo P' di Galois per l'equazione $g(t) = 0$ nel corpo Ω, e il gruppo Q' di Galois di $g(t) = 0$ nel corpo $\Omega(\alpha)$; è Q' un divisore normale di P' di indice j' *non minore* di j. Infatti tra le grandezze del corpo $\Omega(\alpha)$ c'è la ψ, che è irrazionalità naturale in $\Omega(\varepsilon)$ e soddisfa ad un'equazione irriducibile in Ω di grado j. Or l'aggiunzione della sola ψ ad Ω farebbe ridurre il gruppo di $g(t) = 0$ da P' a un divisore di grado $\frac{m}{j}$ e d'indice j; l'aggiunzione di α ad Ω farà, perciò, ridurre il gruppo di $g(t) = 0$ da P' ad un divisore di grado $\leqq \frac{m}{j}$, e quindi di indice $\geqq j$.

Concludiamo pertanto che, se nel corpo $\Omega(\varepsilon)$ l'equazione $G(t) = 0$ ha per gruppo un gruppo d'indice j rispetto a P, nel corpo $\Omega(\alpha)$ l'equazione $g(t) = 0$ ha un gruppo d'indice j', rispetto a P', non inferiore ad j.

Ed ora è facile concludere che $j' = j$; giacchè con un ragionamento analogo al precedente, si mostra che j non è inferiore ad j'.

Se ricordiamo **) alcune proposizioni sull'aggiunzione di irrazionalità algebriche ad un corpo Ω, quanto abbiamo sopra dimostrato possiamo esprimerlo col seguente enunciato:

Se $f(x) = 0$ e $\chi(u) = 0$ sono due equazioni in un corpo Ω, senza radici multiple; $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sono le radici di $f(x) = 0$, $b, b_1, \ldots, b_{m-1}$

*) Cfr. Weber, l. c., S. 465; pag. 539 della traduzione francese.

**) Cfr. Weber, l. c., S. 464-467; pag. 538-540 della traduzione francese.

le radici di $\chi(u) = 0$, e se coll'aggiunzione di b, b_1, ..., b_{m-1} ad Ω il gruppo P di Galois *dell'equazione $f(x) = 0$ si riduce ad un divisore Q d'indice j rispetto a P (necessariamente normale), allora con l'aggiunzione di a, a_1, ..., a_{n-1} ad Ω il gruppo di* Galois *dell'equazione $\chi(u) = 0$ si ridurrà ad un divisore (normale) di indice j.*

Palermo, 29 aprile 1899.

III.

Sulle espressioni algebriche costruibili geometricamente colle sole coniche o con curve di ordine superiore al secondo.

1. Date due coniche in un piano, le coordinate dei loro punti di intersezione si ottengono risolvendo equazioni di grado non superiore al quarto; perciò con estrazioni di radice quadrate e cubiche da quantità razionalmente note. Viceversa ogni espressione algebrica contenente solo radici quadrate e cubiche può costruirsi geometricamente coll'aiuto delle coniche; basta notare che le radici d'un'equazione cubica qualunque

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

si costruiscono come ascisse dei punti d'incontro delle due coniche

$$x^2 = y, \qquad xy + ay + bx + c = 0.$$

Sono perciò costruibili colle sole coniche le radici di tutte le equazioni cicliche irriducibili del grado $2^\lambda 3^\mu$, perchè queste si risolvono mediante una catena di equazioni di 2° e 3° grado *); in particolare i poligoni regolari convessi il cui numero di lati è un numero primo p della forma $2^\lambda 3^\mu + 1$ si costruiscono colle sole coniche; difatti si sa che la divisione della circonferenza in p parti uguali dipende dalla risoluzione dell'equazione di grado $p - 1$:

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0,$$

e questa, nell'ipotesi di p primo, è un'equazione ciclica irriducibile, la cui risoluzione si ottiene risolvendo equazioni di grado eguale ai divisori di $p - 1$ **).

*) Cfr. Weber, *Lehrbuch der Algebra,* Bd. I, S. 539-541; pp. 620-622 della traduzione francese di Griess.

**) Cfr. Weber, l. c., S. 555; pag. 641 della traduzione francese.

Noi vogliamo determinare il grado dell'equazione irreducibile a cui soddisfa un'espressione algebrica

$$x = \varphi(a, b, c, \ldots),$$

dove in φ non entrano che radicali cubici e quadratici delle quantità razionali $a, b, c \ldots$.

2. Generalizzeremo alquanto la quistione, supponendo che la espressione x contenga radicali degli indici $p, q, \ldots, t$ ($p, q, \ldots, t$ numeri primi); ma supporremo aggiunte, al corpo delle funzioni razionali dei parametri $a, b, c, \ldots$, le radici p^{esime}, q^{esime}, $\ldots$, t^{esime} dell'unità.

Innanzi tutto è chiaro che, data un'espressione radico-razionale qualunque, può sempre costruirsi un'equazione razionale che l'ammette come radice; basta *) porre la data espressione φ eguale ad x, ed eliminare successivamente i radicali dall'equazione

$$x = \varphi(a, b, c, \ldots).$$

Si troverà un'equazione razionale $F(x, a, b, c, \ldots) = 0$, la quale può o no essere reducibile nel corpo delle funzioni razionali dei parametri $a, b, c, \ldots$; quello dei suoi fattori irreducibili che si annulla per x eguale alla data espressione, e che vogliam chiamare $\psi(x)$, posto eguale a zero, può ben dirsi *la* equazione a coefficienti razionali, irreducibile, cui soddisfa la quantità data **).

Sia P il gruppo di Galois dell'equazione $\psi(x) = 0$ nel corpo Ω, formato dalle funzioni razionali dei parametri $a, b, c, \ldots$, a cui si sian aggiunte le radici p^{esime}, q^{esime}, $\ldots$, t^{esime} dell'unità. L'equazione $\psi(x) = 0$, essendo irreducibile ed avendo una radice esprimibile algebricamente, è *metaciclica* ***); il gruppo P è metaciclico; e poichè si perviene alla risoluzione completa dell'equazione $\psi(x) = 0$ coll'aiuto di sole equazioni cicliche dei gradi $p, q, \ldots, t$, giacchè una qualunque delle radici di $\psi(x) = 0$ non ha altri radicali che radicali di indici $p, q, \ldots, t$ (essendosi supposte razionali le radici p^{esime}, q^{esime}, ..., t^{esime} dell'unità), segue che gli indici della serie di composizione di P non sono altro che i numeri primi $p, q, \ldots, t$; e però il grado n di P, essendo il prodotto degli indici della

*) Cfr. Capelli, *Lezioni di Algebra complementare*, 2ª ed., pag. 378.

**) Tra le equazioni razionali cui soddisfa la quantità x, essa è quella che ha il grado minimo; tale proprietà le è caratteristica.

***) Cfr. Weber, l. c., S. 599; pag. 696 della traduzione francese.

serie di composizione, è della forma

$$n = p^{\alpha} q^{\beta} \dots t^{\gamma}.$$

Ma l'equazione $\psi(x) = 0$ è irreducibile; il suo grado è un divisore del grado del suo gruppo, cioè è un numero ancor esso della forma

$$p^{\alpha'} q^{\beta'} \dots t^{\gamma'}.$$

E qui noteremo esplicitamente che, quantunque nell'espressione $\varphi(a, b, c, \dots)$ compariscano radicali degli indici $p, q, \dots, t$, pure il grado dell'equazione $\psi(x) = 0$ può non contenere qualche fattore primo $p, q, \dots, t$; ma l'importante è che nel grado dell'equazione $\psi(x) = 0$ *non possono comparire* dei fattori primi che non siano indici di alcuni radicali contenuti nell'espressione $\varphi(a, b, c, \dots)$.

Di questo teorema è importante il caso particolare in cui nell'espressione φ non ci siano altri radicali che radicali di indice p; allora il grado dell'equazione irreducibile cui soddisfa φ è una potenza di p; più particolarmente, il grado dell'equazione irriducibile cui soddisfa un'espressione contenente solo radicali quadratici è una potenza di 2. È notissima l'importanza di questo teorema per le applicazioni che se ne fanno intorno alla risoluzione di certi problemi geometrici coll'uso della riga e del compasso *). $F(x)$ può dimostrarsi essere in questo caso una potenza di $\psi(x)$.

Segue, dal teorema dimostrato, che se il grado di un'equazione irriducibile ciclica contiene qualche fattore primo diverso dal 2 e dal 3, non possono le sue radici costruirsi colle sole coniche; giacchè una espressione algebrica, che possa costruirsi colle sole coniche, non deve contenere altri radicali che cubici e quadratici; ed il grado dell'equazione irreducibile cui una tale espressione soddisfa è, pel teorema, della forma $2^{\lambda} 3^{\mu}$.

In particolare non possono costruirsi coll'aiuto delle sole coniche i poligoni regolari il cui numero di lati sia $p = 2^{\lambda} 5^{\mu} + 1$ (p primo).

Così p. es., per la costruzione del poligono regolare di 11 lati vi è di bisogno di una curva algebrica di ordine superiore al 2°; e più generalmente per costruire un poligono regolare convesso di $p = 2^{\lambda} 5^{\mu} + 1$ lati (p numero primo) basta una curva del 3° ordine. Infatti la costruzione di detto poligono dipende dalla risoluzione di equazioni cicliche di 2° e di 5° grado, e le radici d'un'equazione qualunque di 5° grado

$$y^5 + ay^4 + \dots + e = 0$$

---

*) Cfr. Klein, *Conferenze sopra alcune quistioni di Geometria elementare*, traduzione italiana del Prof. Giudice.

possono geometricamente costruirsi come ascisse dei punti d'incontro a distanza finita della parabola

$$x = y^2$$

colla cubica razionale

$$x^2 y + a x^2 + b x y + c x + d y + e = 0.$$

Volendo fare un'applicazione possiamo riferirci al poligono regolare di 11 lati, o, come è noto, alla costruzione geometrica delle radici dell'equazione

$$(1) \qquad y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0.$$

Questa è un'equazione ciclica irreducibile, come risulta dalla teoria di Gauss; denotando con η, η_1, η_2, η_3, η_4 le radici, il suo gruppo è il periodo della permutazione ciclica

$$(\eta\,\eta_1\,\eta_2\,\eta_3\,\eta_4),$$

cioè è formato dalla permutazione ciclica $(\eta\,\eta_1\,\eta_2\,\eta_3\,\eta_4)$ e dalle sue potenze. Nota la radice η, le altre si ottengono mediante le relazioni

$$\eta_1 = \eta^2 - 2; \qquad \eta_2 = \eta^4 - 4\eta^2 + 2; \qquad \eta_3 = \eta^3 - 3\eta;$$
$$\eta_4 = -\eta^4 - \eta^3 + 3\eta^2 + 2\eta - 1,$$

le quali insieme alla (1) mostrano che η_μ è quella medesima funzione di $\eta_{\mu-1}$, che $\eta_{\mu-1}$ di $\eta_{\mu-2}$.

La risoluzione algebrica dell'equazione (1), trattandosi di un'equazione irreducibile, ciclica di grado primo, si fa ricorrendo alle risolventi di Lagrange *); ma, per un noto teorema di Hölder **), si sa che tra le equazioni, a radici reali, irriducibili in un dato corpo, hanno radici esprimibili per radicali reali solo quelle risolubili per radicali quadratici. Volendo, adunque, risolvere l'equazione (1), che ha tutte le sue radici reali e cioè

$$\eta = 2\cos\frac{2\pi}{11} > 0, \quad \eta_1 = 2\cos\frac{4\pi}{11} > 0, \quad \eta_2 = 2\cos\frac{8\pi}{11} < 0,$$

$$\eta_3 = 2\cos\frac{6\pi}{11} < 0, \quad \eta_4 = 2\cos\frac{10\pi}{11} < 0,$$

non potremo evitare gli immaginarî nelle formole finali; la quantità reale η viene espressa mediante radici di quantità immaginarie.

Geometricamente le radici delle (1) possono ottenersi come ordinate

*) Weber, l. c., S. 542; pag. 622 della traduzione francese.

**) Hölder, Math. Annalen, t. XXXVIII.

dei punti d'incontro della parabola
$$x = y^2$$
colla cubica razionale
$$x^2 y + x^2 - 4xy - 3x + 3y + 1 = 0.$$

Quest'ultima, quando si trasportano gli assi parallelamente all'origine nel punto $(2, -1)$, diventa semplicemente
$$x^2 y + x - y = 0.$$

Le rette $y = 0$, $x = 1$, $x = -1$ sono, nelle nuove coordinate, gli assintoti della curva, la quale ha tre rami reali; uno di questi rami, assintotico alle rette $x = 1$, $x = -1$, cade nella striscia compresa fra queste parallele; un altro ramo, assintotico alle rette $x = 1$, $y = 0$, sta in quell'angolo di queste per ogni punto del quale si ha $x \geqq 1$, $y \leqq 0$; il terzo ramo, assintotico alle rette $x = -1$, $y = 0$, cade in quell'angolo di queste per ogni punto del quale si ha $x \leqq -1$, $y \geqq 0$. La curva è simmetrica rispetto all'origine, che ne è un punto di flesso (unico flesso reale) ed ha un punto doppio nel punto all'infinito dell'asse $x = 0$.

Immaginando disegnata questa curva insieme alla parabola di cui sopra, uno dei sei punti d'incontro è il punto all'infinito della parabola, gli altri cinque sono reali a distanza finita; le ordinate di questi sono le radici dell'equazione (1) e risolvono il problema della divisione della circonferenza in 11 parti uguali.

Palermo, 1° maggio 1899.

IV.

Sulla irrazionalità icosaedrica.

Il Klein nelle sue *Vorlesungen über das Ikosaeder* *) scrive:

« *Wir werden jetzt als weitere, durchführbare Operation die Auflösung* « *der Ikosaedergleichung adjungiren und fragen, ob unter den Aufgaben,* « *die sich durch Wurzelziehen allein nicht erledigen lassen, nicht solche sein* « *mögen, bei denen dies mit Hülfe der Ikosaederirrationalität gelingt* ».

Il primo di tali problemi è la risoluzione dell'equazione generale del

*) I. 4, § 16, S. 112.

5° grado, eseguita completamente dal Klein nel libro citato. Intorno alla quistione che si presenta immediatamente, se col solo aiuto della irrazionalità icosaedrale possono risolversi equazioni *generali* di grado superiore al 5°, abbiamo una nota del prof. Vivanti *), in cui si fa vedere come è impossibile, mediante la sola irrazionalità icosaedrale, risolvere equazioni generali di grado superiore al 5°.

Non parmi fuor di proposito osservare come, giovandosi di alcuni teoremi sulle cosidette *risolventi ad un solo parametro,* i quali si trovano sviluppati nell'eccellente trattato del Weber **), e dei quali anche il Klein si occupa nelle ultime pagine del suo libro sull'icosaedro ***), possa subito darsi la risposta alla domanda innanzi fatta.

Ammettiamo noto ciò che intendesi colla dicitura *risolvere* un'equazione, e che il prof. Vivanti spiega nel § 2 della sua nota, e ricordiamo brevemente ciò che intendesi per risolvente ad un sol parametro dell'equazione generale di grado n.

Siano $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ n variabili indipendenti,

$$u = \Phi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

una loro funzione razionale; e supponiamo che, in corrispondenza al gruppo alternante A delle permutazioni delle n lettere x, u si cambi in altrettante funzioni

$$u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}. \qquad \left(N = \frac{n!}{2}\right)$$

Può accadere che i valori di u, così trovati, non sian distinti; detto ν il numero delle diverse u, è $\nu \leqq \frac{n!}{2}$.

Sia z una funzione razionale delle x, non alterata dal gruppo A; se esiste un'equazione razionale

$$F(u, z) = 0$$

a coefficienti numerici razionali, che sia soddisfatta identicamente dai ν valori u, essa dicesi *una risolvente ad un sol parametro* dell'equazione generale di grado n, che ha per radici le n variabili x.

Or bene si dimostra †) che *un'equazione generale di grado superiore*

*) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* t. IX, pag. 202.

**) Weber, *Lehrbuch der Algebra,* Bd. II, S. 407 e seg.

***) Vedi specialmente le ultime righe della pag. 260.

†) Cfr. Weber, l. c., S. 414.

a 4 non ha risolventi ad un sol parametro; e a questo teorema accenna, senza fermarvisi, il Klein nella pag. 260 del suo libro sull'Icosaedro.

Ora la quistione di decidere se colla sola irrazionalità icosaedrale si possano risolvere equazioni generali di grado superiore al 5°, dipende dall'altra di decidere se l'equazione generale di grado $n > 5$ ha risolventi con un parametro; difatti, come osserva il prof. Vivanti, la risoluzione del problema proposto, dipende da quella del seguente: Supposta z una funzione razionale delle x, non alterata dal gruppo alternante, vedere se sia possibile trovare una funzione razionale u delle x, a più di due valori, legata alla z dalla relazione

$$z = \frac{H^3(u)}{f^5(u)}, \tag{1}$$

in cui *)

$$H(u) = -u^{20} + 228\,u^{15} - 494\,u^{10} - 228\,u^5 - 1$$
$$f(u) = u^{11} + 11\,u^6 - u.$$

Ora ciò è impossibile, perchè la (1), se esistesse, sarebbe una risolvente ad un sol parametro per l'equazione generale di grado n, e ciò per $n > 5$ è impossibile.

La risposta dunque alla quistione premessa è subito data; ma, pare a me, che si possa andare più innanzi e stabilire qualche cosa di più generale.

Dimostro il teorema seguente:

Siano le n variabili x legate da un certo numero di relazioni:

$$A(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0, \quad B(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0, \ldots \tag{2}$$

[A, B, ... simboli di funzioni razionali delle x coi coefficienti numerici razionali], tali però che mediante esse le x non vengano determinate. Consideriamo il gruppo alternante A delle permutazioni delle n lettere x, e siano le relazioni (2) inalterate da A; inoltre esistano determinate funzioni

$$\varphi_0(t), \quad \varphi_1(t), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}(t)$$

tali che posto:

$$x_h = \varphi_h(t), \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

le (2) siano identicamente verificate. Io dico che se $n > 5$, l'equazione di grado n che ha per radici le n variabili x non può ammettere risolventi ad un sol parametro.

Invero, nelle ipotesi fatte, se esiste una risolvente

$$F(u, z) = 0$$

*) Cfr. Klein, l. c., pag. 56.

con un sol parametro, χ essendo una funzione razionale delle x inalterata da A, deve esistere *) una funzione razionale delle x la quale, quando si faccian sulle x le permutazioni di A, subisca le sostituzioni lineari di un gruppo isomorfo ad A. Or questo isomorfismo deve per necessità essere oloedrico, perchè se l'isomorfismo fosse meriedrico seguirebbe **) per A l'esistenza d'un gruppo divisor normale, diverso dal gruppo identico, il che è impossibile, essendo il gruppo A semplice. Questo gruppo di sostituzioni lineari, essendo finito, deve essere un cosidetto gruppo poliedrico, il quale dovrà risultare isomorfo oloedrico ad un gruppo semplice, e perciò semplice anch'esso. Ma di gruppi poliedrici semplici non c'è altro che il gruppo dell'icosaedro, dunque nelle ipotesi fatte non c'è che l'equazione di 5° grado che possa ammettere risolventi ad un sol parametro.

Che poi l'equazione di 5° grado, tra le radici della quale passino delle relazioni come le (2) con tutte le condizioni esposte nel teorema, ammetta risolventi ad un parametro, è quello che mostra il Klein nel suo libro sull'icosaedro.

Ivi il Klein pone a fondamento del suo studio 5 variabili x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 legate dalle due relazioni

$$\sum x = 0, \qquad \sum x^2 = 0 \tag{I}$$

e le pensa come radici d'un'equazione di 5° grado, che egli chiama *Hauptgleichung* e che ha la forma:

$$x^5 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{3}$$

Le ipotesi limitatrici sono qui soddisfatte, come lo mostra anche il Weber nel suo trattato ***). Ed in tali ipotesi il Klein trova parecchie risolventi ad un parametro tra le quali quella detta icosaedrale, che è precisamente la (1), χ è una certa funzione razionale dei coefficienti e di $\sqrt{D}$, D essendo il discriminante della (3), cioè una funzione a due valori delle cinque x, che il Klein ed anche il Weber †) insegnano a costruire.

Piacemi a questo proposito accennare ad una mia idea sul modo di comportarsi dell'equazione icosaedrale (1), che è una risolvente di Galois della *Hauptgleichung* (3), nell'ipotesi che questa sia risolubile algebrica-

*) Weber, l. c., S. 417.

**) Weber, l. c., S. 15.

***) Weber, l. c., Bd. I, § 74, Bd. II, § 110, S. 416.

†) Weber, l. c., Bd. II, § 112.

mente; cioè nell'ipotesi che le 5 variabili x, oltre a soddisfare alle due sole condizioni (I), soddisfacciano a certe altre condizioni, a noi ignote, tali però che l'*Hauptgleichung* sia risolubile algebricamente.

In quest'ipotesi, il gruppo di Galois della (3) deve essere *lineare*, quindi la sua risolvente di Galois deve essere di grado 20 o di grado 10 secondo che il suo gruppo è l'intero lineare o il semimetaciclico *). Perciò il 1° membro dell'equazione icosaedrale, ridotta a zero, quando per le x in χ si pongono le radici di un'equazione *Hauptgleichung* metaciclica, deve spezzarsi in fattori tutti dello stesso grado, perchè ognuno di essi, posto eguale a zero, può esser considerato come una risolvente di Galois. Se $\psi(u)$ è uno di questi fattori, $u_0, u_1, \ldots$ le radici di $\psi(u)=0$, le sostituzioni lineari mediante le quali da u_0 si passa ad u_0, $u_1, u_2, \ldots$ devono formare un gruppo isomorfo oloedrico al gruppo di Galois della nostra equazione *Hauptgleichung*, e deve per altro essere un divisore dell'icosaedro; di qui deduciamo che $\psi(u)$ non può essere di grado 20, ma bensì di grado 10, giacchè il gruppo dell'icosaedro non ha divisori di grado 20. Dunque concludiamo che il 1° membro dell'equazione icosaedrale, quando nell'espressioni di χ si pongono per le x le radici di un'equazione *Hauptgleichung* metaciclica, deve spezzarsi in 6 fattori di grado 10. Ognuno di questi fattori, posto eguale a zero, darà un'equazione il cui gruppo è un gruppo di grado 10 divisore dell'icosaedro, ossia un cosidetto diedro D_5 **); e questi 6 gruppi diedri D_5 sono trasformati di uno di essi e sono tutti i 6 gruppi diedri D_5 divisori del gruppo dell'icosaedro.

Consideriamo il gruppo dell'icosaedro in una delle forme normali in cui esso può ridursi, quella che si legge nel volume 2° del trattato del Weber ***), originato da certe sostituzioni che l'autore chiama

$$\mathfrak{S},\quad \psi,\quad \chi.$$

Uno dei gruppi diedri D_5 sarà dato da

$$Q = \mathfrak{S}^r,\quad \mathfrak{S}^r\psi \qquad (r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

e gli altri sono i trasformati di questo mediante le sostituzioni

$$\chi,\quad \chi\mathfrak{S},\quad \chi\mathfrak{S}^2,\quad \chi\mathfrak{S}^3,\quad \chi\mathfrak{S}^4.$$

Uno dei fattori in cui si spezza l'equazione icosaedrale ha dunque

*) Weber, Bd. I, S. 621; pag. 120 della traduzione francese di Griess.

**) Weber, Bd. II, § 111, S. 419.

***) Weber, Bd. II, § 58, S. 220.

per gruppo il gruppo Q, e gli altri hanno per gruppi i trasformati di Q; e se si pensa che

$$\vartheta = (x, \quad \varepsilon x) \qquad \text{(ε radice 5^a immaginaria dell'unità)}$$

$$\psi = \left(x, \quad -\frac{1}{x}\right),$$

si ha che le radici di uno dei fattori (e precisamente di quello che ha per gruppo il gruppo Q) si posson dedurre da una di esse u nella seguente maniera:

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{ccccc} u, & \varepsilon u, & \varepsilon^2 u, & \varepsilon^3 u, & \varepsilon^4 u \\ -\dfrac{1}{u}, & -\dfrac{\varepsilon}{u}, & -\dfrac{\varepsilon^2}{u}, & -\dfrac{\varepsilon^3}{u}, & -\dfrac{\varepsilon^4}{u} \end{array}$$

Ed ora, pensando che le forme invariantive pel gruppo diedro Q, messo nella forma (II) e colle variabili omogenee, sono

$$f_1 = u_1^5 + i u_2^5, \quad f_2 = u_1^5 - i u_2^5, \quad f_3 = u_1 u_2,$$

e che si ha la relazione

$$f_1^2 - f_2^2 = 4 i f_3^5,$$

concludo che, posto $\frac{u_1}{u_2} = u$, la equazione

$$\frac{f_1^2(u)}{f_3^5(u)} = Z,$$

in cui Z è un parametro arbitrario, è un'equazione diedrale le cui radici si ottengono da una di esse colle sostituzioni del diedro Q.

Per una determinata scelta del parametro Z, sarà

$$f_1^2(u) - Z f_3^5(u)$$

uno dei fattori in cui si spezza il 1° membro dell'equazione icosaedrale ridotta a zero. Gli altri fattori s'ottengono da questo applicando alla u le sostituzioni dell'icosaedro; sicchè, nel caso che l'equazione *Hauptgleichung* è risolubile algebricamente, deve potersi trovare una funzione Z delle quantità a, b, c, $\sqrt{D}$ in guisa che si abbia identicamente

$$H^3 - z f^5 = \prod [f_1^2(u) - Z f_3^5(u)],$$

il prodotto essendo esteso ai vari fattori distinti che si ottengono da $f_1^2(u) - Z f_3^5(u)$ applicando le sostituzioni dell'icosaedro alla u.

Resta ora la quistione della determinazione della funzione Z, e l'altra di vedere quali condizioni sono da imporre ai coefficienti affinchè una tale determinazione sia possibile. Così verrebbe risoluta la quistione di decidere, dati i coefficienti a, b, c di una equazione *Hauptgleichung* di 5° grado,

se essa è o no risolubile algebricamente. Ciò spero di fare in ulteriori ricerche.

È noto come tale quistione è stata risoluta per le cosidette equazioni di 5° grado di Jerrard, cioè equazioni di 5° grado della forma

$$x^5 + \alpha x + \beta = 0.$$

Il Weber *) fa vedere che ogni equazione di Jerrard è in un certo corpo Ω risolubile algebricamente allora e solo allora quando i coefficienti α e β possono esprimersi in funzione di due parametri λ e μ del corpo Ω nel seguente modo:

$$\alpha = \frac{5^5 \mu^4 \lambda}{(\lambda - 1)^4 (\lambda^2 + 6\lambda + 25)}, \quad \beta = \frac{5^5 \mu^5 \lambda}{(\lambda - 1)^4 (\lambda^2 + 6\lambda + 25)}.$$

Il Runge **) dimostra che, se λ e μ sono due numeri d'un corpo, l'equazione di Jerrard, se si ha

$$(4) \qquad \alpha = \frac{5 \mu^4 (4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1}, \quad \beta = \frac{4 \mu^5 (4\lambda + 3)(2\lambda + 1)}{\lambda^2 + 1},$$

è in quel corpo risolubile algebricamente. E viceversa, se un'equazione della forma $x^5 + \alpha x + \beta = 0$ è risolubile algebricamente in un corpo, è possibile determinare due numeri λ e μ del corpo in guisa che le (4) siano verificate.

Palermo, 8 maggio 1899.

IV.

Sulla riduttibilità delle equazioni binomie.

1. Abel pel primo si occupò della riducibilità dell'equazione binomia

$$(1) \qquad x^n - a = 0,$$

in cui a è un numero d'un dato corpo Ω; ma considerò soltanto il caso in cui n è un numero primo, e stabilì il teorema, ormai notissimo e che si trova in quasi tutti i trattati di algebra ***), che affinchè l'equazione bi-

*) Weber, Bd. I, S. 626; pag. 726 della traduzione francese.

**) Runge, *Acta Mathematica*, v. 7.

***) Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. I, S. 607.—Netto, *Teoria delle sostituzioni*, traduzione di Battaglini, pag. 219.—Capelli, *Lezioni di Algebra complementare*, 2ª ed., pag. 501.

nomia (1) sia in Ω riducibile, è necessario e sufficiente che a sia potenza n^{esima} di un numero di Ω.

Nel vol. 19° degli *Acta Mathematica* abbiamo una nota del sig. Vahlen, il quale toglie la restrizione fatta sull'esponente n di essere cioè un numero primo, ma impone l'altra che a sia un numero razionale, ovvero una funzione razionale (a coefficienti razionali) di un numero arbitrario di variabili, ciò che nella teoria dei numeri algebrici, secondo Kronecker, chiamasi *funzionale razionale* *).

La quistione dell'irreducibilità dell'equazione binomia (1), nella sua massima generalità, cioè con n qualunque, ed a appartenente ad un corpo qualunque dato, è stata trattata a fondo dal prof. Capelli **) in guisa che nulla resta più a completare dell'argomento.

In questa nota io non mi propongo altro che di far notare come, servendosi di considerazioni molto semplici, *d'indole puramente aritmetica*, e con ipotesi che, se non sono le più generali, sono meno restrittive di quelle fatte dal Vahlen, si possono ottenere i teoremi ottenuti dal Vahlen. Nell'ultimo numero di questa nota dimostro un teorema che non ha relazione alcuna coi risultati ottenuti dal Vahlen e dal Capelli, nei lavori predetti, ma che dà una proprietà delle equazioni binomie.

2. Premettiamo un'osservazione molto utile per il seguito.

Ω è un corpo di numeri, a un suo elemento, e l'uguaglianza

$$a = b^{\mu}$$

dove b è un numero di Ω e μ un divisore qualunque di n, non sussiste per ipotesi. Dico che, se α è una radice qualunque dell'equazione (1), sarà α^n la *minima* potenza intera positiva di α che sia *razionale*, cioè una quantità di Ω.

Infatti se α^p è una tale minima potenza di α, con $p < n$, deve essere n multiplo di p; altrimenti, posto $n = pq + r$, $(r < p)$, si avrebbe

$$a = \alpha^n = (\alpha^p)^q . \alpha^r$$

ed α^r sarebbe razionale. Posto allora $n = pq$, concluderemo

$$a = \alpha^n = (\alpha^p)^q = b^q,$$

b essendo una quantità di Ω, il che è contro l'ipotesi se $q > 1$.

*) Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. II, S. 500.

**) *Rend. Acc. Scienze di Napoli*, dicembre 1897.

Fatta quest'osservazione, poniamo che si abbia

(2) $$x^n - a = f_1(x).f_2(x),$$

f_1, f_2 funzioni intere, non costanti, di x coi coefficienti in Ω.

Se α è una radice di $f_1(x) = 0$, le altre radici di $f_1(x) = 0$ son della forma $\varepsilon^\lambda \alpha$, ε essendo una radice n^{esima} dell'unità; il loro prodotto, che è una quantità razionale b e precisamente il termine noto in $f_1(x)$, è della forma $\varepsilon^\lambda \alpha^m$, se m è il grado di $f_1(x)$. Sicchè potremo concludere l'eguaglianza

(I) $$\alpha^m = \eta b,$$

con η radice n^{esima} dell'unità.

Ed ora consideriamo due casi: o il corpo Ω contiene tutte le radici n^{esime} dell'unità, o il corpo Ω non contiene alcuna delle radici n^{esime} irrazionali dell'unità. Son questi i casi che io esamino in questa nota; essi non sono i più generali, ma contengono il caso considerato dal Vahlen: il corpo R dei numeri razionali non contiene infatti alcuna radice n^{esima} irrazionale dell'unità.

Nel 1° caso la (I) non può stare, per l'osservazione premessa, se $m < n$; deve dunque essere $m = n$, il che dice che l'equazione (1) è irreducibile. Donde il teorema:

L'equazione binomia $x^n - a = 0$, in cui a è un numero d'un corpo Ω, il quale contiene tutte le radici n^{esime} dell'unità, è irreducibile se a non è potenza d'un numero di Ω con esponente divisore di n; ossia, affinchè l'equazione stessa si riduca, è necessario (e sufficiente) che a sia potenza d'un numero di Ω con esponente divisore di n.

Il 2° caso ha bisogno di un esame più accurato.

Innalzando la (I) alla potenza n^{esima}, si ha

$$a^m = b^n.$$

Sia μ il m.c.d. tra m ed n; determiniamo due interi ξ, η in guisa che si abbia

$$m\xi + n\eta = \mu,$$

ed avremo

$$a^\mu = (b^\xi a^\eta)^n = c^n, \quad \text{posto} \quad c = b^\xi a^\eta,$$

donde:

(3) $$a = \rho . c^{\frac{n}{\mu}},$$

ρ essendo una radice dell'equazione

$$\rho^\mu = 1.$$

Essendo μ divisore di n, è ρ una radice n^{esima} dell'unità; ed allora,

dovendo ρ essere una quantità razionale, come risulta dalla (3), e d'altra parte non essendo nel corpo Ω contenuta alcuna delle radici n^{esime} irrazionali dell'unità, dovrà essere

$$\rho = \pm 1.$$

Ma $\rho = 1$ è contro l'ipotesi se, come supponiamo, $\mu < n$.

Nè può essere $\rho = -1$, se $\frac{n}{\mu}$ *non è potenza di* 2. Perchè, posto $\frac{n}{\mu} = 2^\lambda . p$, con p impari maggiore di 1, si avrebbe

$$a = -c^{\frac{n}{\mu}} = (-c^{2^\lambda})^p$$

contro l'ipotesi.

E però concludiamo che, nel 2° caso, non può l'equazione (1) spezzarsi nei due fattori (2) se $\frac{n}{\mu} \neq 2^\lambda$; e in particolare non può l'equazione (1) spezzarsi, se n è un numero impari.

Ed ora io dico che l'equazione (1) non può spezzarsi anche se n è pari, ma non multiplo di 4. In tal caso, infatti, se $\frac{n}{\mu}$ non è impari, è uguale a $2r$ con r impari. Se $r > 1$ il teorema è dimostrato, perchè si avrebbe

$$a = (-c^2)^r.$$

Se $r = 1$, sarà $n = 2\mu$, $m = \mu$ (impari). È possibile determinare due interi ξ, η in guisa che si abbia

$$2\xi + m\eta = 1,$$

ed allora sarà, tenendo presente che $a^m = b^n$,

$$a = a^{2\xi} a^{m\eta} = a^{2\xi} b^{2m\eta} = (a^\xi b^{m\eta})^2$$

contro l'ipotesi.

Concludiamo adunque il teorema:

Se un corpo non contiene radici n^{esime} irrazionali dell'unità e se $n = 2p^\alpha q^\beta \ldots$ ($p, q, \ldots$, numeri primi impari), la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione $x^n - a = 0$ sia in quel corpo riducibile è che a sia potenza, con esponente divisore di n, di un numero del corpo.

Resta da esaminare il caso in cui n è un multiplo di 4; da ciò che abbiam detto precedentemente risulta che, ferma restando l'ipotesi fatta sul corpo di numeri in cui è data la quantità a, affinchè l'equazione $x^n - a = 0$ ivi si riduca, è necessario che sia

$$a = -c^{2^\lambda},$$

ossia che $-a$ sia il quadrato di un numero del corpo:

$$-a = (c^{2^{\lambda-1}})^2.$$

Un esame più accurato mostrebbe che affinchè, in tale ipotesi, l'equazione $x^n - a = 0$ si riduca, è necessario e sufficiente che $-a$ sia il quadruplo della 4^a potenza d'un numero del corpo:

$$-a = (2\, c^2)^2.$$

3. Finalmente vogliamo dare una dimostrazione, nella quale si conserva lo stesso ordine di idee relativamente al caso in cui il corpo è comunque fatto, ma il grado n dell'equazione binomia (1) non è divisibile per alcun quadrato.

Partiamo sempre dalla (I) ed inalziamo alla potenza n^{esima}; avremo:

$$a^m = b^n,$$

m grado di $f_1(x)$; μ essendo il m. c. d. tra m ed n, determiniamo due interi ξ, η tali che sia

$$m\xi + n\eta = \mu,$$

allora sarà:

$$a = \rho\,(a^\eta b^\xi)^{\frac{n}{\mu}}, \qquad \rho^\mu = 1. \tag{4}$$

Se $\mu = 1$ siam contro l'ipotesi.

Sia $\mu > 1$ e $\rho \neq 1$; sia $n = p\,q\,r\, \dots\, s$, (p, q, r, ... s essendo numeri primi diversi) e $\mu = p\,q\,r\, \dots < n$. Se il numero primo s p. es., non entra in μ, sarà s primo con μ. Il corpo contenendo ρ, come lo mostra la (4), conterrà tutte le radici ν^{esime} dell'unità, se ν è l'esponente cui appartiene ρ. Intanto ν è divisor di μ, quindi s è primo con ν.

È possibile perciò determinare una radice ν^{esima} dell'unità, che diciamo σ, in guisa che sia $\sigma^s = \rho$; σ sta nel corpo, ed allora si ha

$$a = [\sigma\,(a^\eta b^\xi)^{\frac{n}{s\mu}}]^s \qquad \left(\frac{n}{s\mu} = \text{intero}\right)$$

contro l'ipotesi.

4. Passiamo infine a dimostrare un teorema, che crediamo degno di nota, riguardo alla riducibilità delle equazioni algebriche, e che dà una proprietà delle equazioni binomie. Esso si enuncia così:

Se un'equazione $f(x) = 0$, *le cui radici indichiamo con* $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$,

è in un corpo Ω irreducibile, e resta tale anche nel corpo

$$\Omega\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \frac{\alpha_2}{\alpha}, \dots, \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha}\right) = \Omega',$$

essa è un'equazione binomia.

Infatti, posto $\frac{\alpha_i}{\alpha} = \beta_i$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, se nel corpo Ω' l'equazione $f(x) = 0$ si mantiene irriducibile, essa in questo corpo è un'equazione *normale* *), in quanto che le sue radici sono funzioni razionali coi coefficienti in Ω' di una di esse; e precisamente le radici di $f(x) = 0$ possono esprimersi mediante α nel seguente modo:

$$\alpha, \ \beta_1\alpha, \ \beta_2\alpha, \dots, \beta_{n-1}\alpha,$$

e le β sono razionali in Ω'. Le sostituzioni del suo gruppo di Galois sono le sostituzioni lineari moltiplicative

$$(x, x), \ (x, \beta_1 x), \dots, (x, \beta_{n-1}x).$$

Ora, dalla teoria dei gruppi di sostituzioni lineari d'una variabile **), ricaviamo che le quantità $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ sono tutte le radici n^{esime} dell'unità. Ed allora essendo

$$\beta_1\beta_2 \dots \beta_{n-1} = 1$$

ed

$$\alpha\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1} = \textit{quantità di } \Omega = a,$$

ricaviamo

$$\alpha^n = \alpha\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1} = \textit{quantità di } \Omega = a,$$

ossia α è radice dell'equazione binomia

$$x^n - a = 0,$$

e però

$$f(x) = x^n - a.$$

Il teorema è dimostrato.

Palermo, 9 maggio 1899.

FORTUNATO BUCCA.

*) Weber, Bd. I, S. 465; pag. 539 della traduzione francese di Griess.

**) Weber, Bd. II, S. 199-200.

SOPRA UN PROBLEMA D'INTERPOLAZIONE.

Nota di S. **Pincherle**, in Bologna.

Adunanza del 10 dicembre 1899.

1. Abbiasi la serie

$$\sigma(x) = \sum_0^\infty{}^n b_n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}, \tag{1}$$

dove i numeri b_n sono soggetti alla condizione

$$|b_n| < b\eta^n, \tag{2}$$

essendo b ed η numeri positivi, ed $\eta < 1$. La $\sigma(x)$ è, sotto questa ipotesi, una funzione trascendente intera di x, che si può anche ordinare secondo le potenze crescenti della variabile, nella forma

$$\sigma(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots.$$

Dal paragone di questa colla (1), si vede subito che le b_n e le k_n sono legate fra loro da relazioni della forma

$$k_n = p_{n,n} b_n + p_{n,n+1} b_{n+1} + p_{n,n+2} b_{n+2} + \ldots. \tag{3}$$

In queste relazioni i numeri $p_{n,\nu}$ sono coefficienti numerici, indipendenti dal sistema dei coefficienti b_n della serie (1). Si potranno dunque scegliere le b_n nel modo che sembrerà più opportuno per trovare il valore delle $p_{n,\nu}$; in particolare, si potrà porre

$$b_n = z^n, \qquad |z| < 1;$$

con ciò, la $\sigma(x)$ diviene

$$\sum_0^\infty{}^n z^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = (1+z)^x.$$

La k_n non è dunque altro che il coefficiente di x^n nello sviluppo di

$(1+z)^x$ in serie di potenze di x, cioè

$$k_n = \frac{1}{n!} \log^n (1+z).$$

Concludiamo da ciò che:

Il numero $p_{n,\nu}$ non è altro che il coefficiente di z^ν nello sviluppo di $\log^n (1+z)$ *in serie di potenze di z.*

Inoltre, risulta dalla condizione (2) la convergenza assoluta dei secondi membri delle (3).

2. Premessa questa semplicissima osservazione, supponiamo di volere determinare una funzione intera di x, $\sigma(x)$, che per il valore $x = n$ della variabile assuma il valore determinato a_n, n essendo sempre un numero intero (positivo o nullo). In altri termini, si voglia una soluzione del sistema di infinite equazioni lineari ad infinite incognite:

$$(4) \qquad k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \ldots = a_n. \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Cercando lo sviluppo di una tale funzione mediante la formula di interpolazione di Newton, estesa all'infinito dal sig. Bendixson *), si trova facilmente per essa l'espressione

$$\sigma(x) = \sum_0^\infty \Delta^n a_0 \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!},$$

dove è

$$\Delta^n a_0 = a_n - n a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0;$$

questa espressione formale rappresenta poi effettivamente una trascendente intera sotto la condizione, per i valori dati a_n:

$$(5) \qquad |\Delta^n a_0| < h \eta^n, \qquad \eta < 1.$$

In tale ipotesi:

I numeri k_n che risolvono il sistema (4) sono dati dalle serie (assolutamente convergenti)

$$k_n = p_{n,n} \Delta^n a_0 + p_{n,n+1} \Delta^{n+1} a_0 + p_{n,n+2} \Delta^{n+2} a_0 + \ldots,$$

dove $p_{\nu,n}$ è il coefficiente di z^ν nello sviluppo di $\log^n (1+z)$ *in serie di potenze di z.*

Bene inteso, trovata una $\sigma(x)$ che risolva il problema, se ne ottengono infinite altre mediante l'aggiunta delle note trascendenti intere che si annullano nei punti $n = 0, 1, 2, \ldots$.

---

*) Acta Mathematica, t. IX (1887), p. 1.

3. La regola precedente di risoluzione del sistema (1) vale quando le a_n soddisfano alla condizione (5). A questa condizione si può dare un'altra forma, ricordando l'applicazione fatta recentemente dal signor E. Lindelöf della sostituzione di Eulero alla teoria delle funzioni*). Se infatti consideriamo la funzione

$$f(t) = \sum_0^\infty{}^n a_n t^{n+1},$$

questa si può scrivere identicamente

$$f(t) = \sum_0^\infty{}^n \Delta^n a_0 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n+1};$$

onde risulta che, affinchè le a_n verifichino la condizione (5), è necessario e sufficiente che la funzione $f(t)$ sia regolare entro tutto il campo i cui punti sono definiti dalla condizione

$$\frac{|t|}{|1-t|} > \rho,$$

dove ρ è un numero maggiore dell'unità; campo che è costituito dalla regione esterna ad un cerchio avente il suo centro sull'asse reale.

Bologna, 4 dicembre 1899.

S. PINCHERLE.

*) Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, t. XXIV (1898), n° 7.

SULLA TRASFORMAZIONE DI LAPLACE.

Nota di G. Vivanti, in Messina.

Adunanza del 7 gennajo 1900.

1. La trasformazione di Laplace muta un'equazione del 2° ordine a due variabili indipendenti della forma:

$$s + ap + bq + cz = 0 \tag{1}$$

in una dello stesso ordine e della stessa forma. Solo nel caso in cui una delle due espressioni:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = h, \qquad \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = k$$

è identicamente nulla, l'equazione trasformata si riduce al primo ordine e contiene una sola delle derivate parziali di z.

Ci proponiamo di esaminare se questi risultati possano estendersi alle equazioni a tre variabili indipendenti.

2. L'analoga dell'equazione (1) pel caso di 3 variabili indipendenti x_1, x_2, x_3 è l'equazione del 3° ordine:

$$p_{123} + ap_{23} + bp_{31} + cp_{12} + dp_1 + ep_2 + fp_3 + gz = 0, \tag{2}$$

dove p_i, p_{ik}, p_{ikh} denotano le derivate parziali prime, seconde e terze della z. Applichiamo ad essa la trasformazione:

$$Z = p_1 + az, \tag{3}$$

e cerchiamo le condizioni perchè l'equazione trasformata sia del 2° ordine e non contenga alcuna derivata di Z rispetto ad x_1. Dalla (3) segue:

$$(4)\qquad \begin{cases} P_2 = p_{12} + ap_2 + a_2 z, \\ P_3 = p_{13} + ap_3 + a_3 z, \\ P_{22} = p_{122} + ap_{22} + 2a_2 p_2 + a_{22} z, \\ P_{23} = p_{123} + ap_{23} + a_2 p_3 + a_3 p_2 + a_{23} z, \\ P_{33} = p_{133} + ap_{33} + 2a_3 p_3 + a_{33} z, \end{cases}$$

dove gl'indici denotano la derivazione rispetto alle corrispondenti variabili. Dev'essere identicamente, tenuto conto della (2):

$$(5)\qquad \alpha P_{22} + \beta P_{23} + \gamma P_{33} + \delta P_2 + \varepsilon P_3 + \zeta Z = 0,$$

dove le α, β, γ, δ, ε, ζ sono funzioni delle variabili indipendenti. La (5) diviene, in virtù delle (3), (4):

$$\begin{aligned} \alpha p_{122} + \beta p_{123} + \gamma p_{133} + \delta p_{12} + \varepsilon p_{13} + \alpha a p_{22} + \beta a p_{23} + \gamma a p_{33} + \zeta p_1 \\ + (2\alpha a_2 + \beta a_3 + \delta a) p_2 + (\beta a_2 + 2\gamma a_3 + \varepsilon a) p_3 \\ + (\alpha a_{22} + \beta a_{23} + \gamma a_{33} + \delta a_2 + \varepsilon a_3 + \zeta a) z = 0. \end{aligned}$$

Il primo membro di questa equazione deve coincidere col primo membro della (2); ne segue, con semplici calcoli:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = c, \; \varepsilon = b, \quad \zeta = d,$$

inoltre:

$$(6)\quad a_2 + ab - f = 0, \quad a_3 + ac - e = 0, \quad a_{23} + ca_2 + ba_3 + da - g = 0,$$

e la (5) diviene:

$$(7)\qquad P_{23} + cP_2 + bP_3 + dZ = 0.$$

Il sistema (6) equivale al seguente:

$$(8)\quad a_2 + ab - f = 0, \quad a_3 + ac - e = 0, \quad a_{23} - 2abc + ad + be + cf - g = 0.$$

Osserviamo che la (7) ha la forma (1); e che essa inoltre è riducibile alle quadrature mediante la trasformazione di Laplace se, oltre le (8), sono soddisfatte le equazioni che si ottengono da esse mediante permutazione ciclica delle variabili.

3. Esaminiamo ora sotto quali condizioni la (2) si muta, in virtù della (3), in un'equazione della stessa forma.

Dalla (3), oltre le (4), risultano le seguenti:

$$P_1 = p_{11} + ap_1 + a_1 z,$$

$$P_{1i} = p_{11i} + ap_{1i} + a_1 p_i + a_i p_1 + a_{1i} z; \qquad (i = 1, 2, 3)$$

di più, mediante la (2), l'espressione di P_{23} diviene:

$$P_{23} = -bp_{31} - cp_{12} - dp_1 + (a_3 - e)p_2 + (a_2 - f)p_3 + (a_{23} - g)z,$$

donde segue derivando:

$$P_{123} = -bp_{113} - cp_{112} - dp_{11} + (a_3 - c_1 - e)p_{12} + (a_2 - b_1 - f)p_{13}$$
$$+ (a_{23} - d_1 - g)p_1 + (a_{13} - e_1)p_2 + (a_{12} - f_1)p_3 + (a_{123} - g_1)z.$$

L'equazione trasformata:

$$(9)\quad P_{123} + AP_{23} + BP_{31} + CP_{12} + DP_1 + EP_2 + FP_3 + GZ = 0$$

dovrà essere identicamente soddisfatta, quando in essa si introducano le espressioni precedenti di Z e delle sue derivate. Posto:

$$(10)\quad \begin{cases} a_2 + ab - f = L, & a_3 + ca - e = l, \\ b_3 + bc - d = M, & b_1 + ab - f = m, \\ c_1 + ca - e = N, & c_2 + bc - d = n, \\ a_{23} - 2abc + ad + be + cf - g = \lambda, \\ b_{31} - 2abc + ad + be + cf - g = \mu, \\ c_{12} - 2abc + ad + be + cf - g = \nu, \end{cases}$$

le equazioni di condizione risultanti possono scriversi così:

$$(11)\qquad C = c, \qquad B = b, \qquad D = d,$$

$$(12)\quad Ac - E = l - c_1, \quad Ab - F = L - b_1, \quad Ad - G = \lambda + cL + bl - d_1,$$

$$(13)\quad \begin{cases} A(a_3 - e) + Ea = -a_{13} - ca_1 + e_1 = -l_1 + ac_1, \\ A(a_2 - f) + Fa = -a_{12} - ba_1 + f_1 = -L_1 + ab_1, \end{cases}$$

$$(14)\quad A(a_{23} - g) + Ea_2 + Fa_3 + Ga = -a_{123} - ba_{13} - ca_{12} - da_1 + g_1.$$

Dalle (12), (13) segue:

$$(15)\qquad A = a - \frac{l_1}{l} = a - \frac{L_1}{L},$$

$$(16)\quad \begin{cases} E = e + N - l - c\dfrac{l_1}{l}, \\ F = f + m - L - b\dfrac{L_1}{L}, \\ G = g - a_{23} - ba_3 - ca_2 + d_1 - d\dfrac{l_1}{l}. \end{cases}$$

Dalla (15) risulta:

$$(17)\qquad \frac{l_1}{l} = \frac{L_1}{L},$$

e dalla (14), tenuto conto delle (15), (16), con qualche trasformazione:

$$(18)\quad \lambda_1 - \lambda\frac{l_1}{l} = L(a_3 - c_1) + l(a_2 - b_1) = L(l - N) + l(L - m).$$

Le (11), (15), (16) dànno le espressioni dei coefficienti dell'equa-

zione trasformata; le (17), (18) le condizioni perchè la trasformazione possa aver luogo. È da notarsi che queste condizioni contengono soltanto le quantità (10), le quali possono dirsi gli *invarianti* dell'equazione data.

Ponendo:

$$\lg L = \Phi, \qquad \lg M = \Psi, \qquad \lg N = \Omega,$$

$$\lg l = \varphi, \qquad \lg m = \psi, \qquad \lg n = \omega,$$

le (17), (18) possono scriversi:

$$(19) \qquad \varphi_1 = \Phi_1, \qquad \lambda_1 - \lambda\varphi_1 = L(l - N) + l(L - m).$$

4. I nove invarianti, essendo funzioni dei sette coefficienti della (2) non possono essere tra loro indipendenti. Notiamo le seguenti relazioni esistenti tra essi:

$$(20) \; M_1 - n_1 = \mu - \nu, \quad N_2 - l_2 = \nu - \lambda, \quad L_3 - m_3 = \lambda - \mu,$$

$$(21) \qquad M_1 + N_2 + L_3 - n_1 - l_2 - m_3 = 0.$$

5. Se si fa la trasformazione di variabili:

$$x_1 = f_1(X_1), \qquad x_2 = f_2(X_2), \qquad x_3 = f_3(X_3),$$

i rapporti $L : m$, $M : n$, $N : l$, $\lambda : \mu : \nu$ restano invariati.

Si trova infatti, senza alcuna difficoltà, che le L, m risultano moltiplicate per $f_1'(X_1)f_2'(X_2)$, le M, n per $f_2'(X_2)f_3'(X_3)$, le N, l per $f_3(X_3)f_1'(X_1)$, le λ, μ, ν per $f_1'(X_1)f_2(X_2)f_3'(X_3)$.

6. Se in luogo della variabile dipendente z si introduce la Z legata ad essa dalla relazione:

$$(22) \qquad z = \theta Z,$$

dove θ è una funzione delle variabili indipendenti, gli invarianti restano immutati.

Dalla (22) segue:

$$p_i = \theta P_i + \theta_i Z,$$

$$p_{ih} = \theta P_{ih} + \theta_i P_h + \theta_h P_i + \theta_{ih} Z,$$

$$p_{123} = \theta P_{123} + \theta_1 P_{23} + \theta_2 P_{31} + \theta_3 P_{12} + \theta_{23} P_1 + \theta_{31} P_2 + \theta_{12} P_3 + \theta_{123} Z,$$

e la (2) diviene:

$$(23)\left\{\begin{aligned}&P_{123}+\left(a+\frac{\theta_1}{\theta}\right)P_{23}+\left(b+\frac{\theta_2}{\theta}\right)P_{31}+\left(c+\frac{\theta_3}{\theta}\right)P_{12}\\&+\left(d+b\frac{\theta_3}{\theta}+c\frac{\theta_2}{\theta}+\frac{\theta_{23}}{\theta}\right)P_1+\left(e+c\frac{\theta_1}{\theta}+a\frac{\theta_3}{\theta}+\frac{\theta_{31}}{\theta}\right)P_2\\&+\left(f+a\frac{\theta_2}{\theta}+b\frac{\theta_1}{\theta}+\frac{\theta_{12}}{\theta}\right)P_3+\left(g+d\frac{\theta_1}{\theta}+e\frac{\theta_2}{\theta}+f\frac{\theta_3}{\theta}\right.\\&\left.+a\frac{\theta_{23}}{\theta}+b\frac{\theta_{31}}{\theta}+c\frac{\theta_{12}}{\theta}+\frac{\theta_{123}}{\theta}\right)Z=0.\end{aligned}\right.$$

Poniamo:

$$\lg\theta=\eta,$$

donde:

$$\frac{\theta_i}{\theta}=\eta_i,\quad \frac{\theta_{ik}}{\theta}=\eta_{ik}+\eta_i\eta_k,\quad \frac{\theta_{123}}{\theta}=\eta_{123}+\eta_1\eta_{23}+\eta_2\eta_{31}+\eta_3\eta_{12}+\eta_1\eta_2\eta_3;$$

indicando con A, B, ..., G i coefficienti della (23), si ha:

$$(24)\left\{\begin{aligned}A&=a+\eta_1,\\B&=b+\eta_2,\\C&=c+\eta_3,\\D&=d+b\eta_3+c\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_{23},\\E&=e+c\eta_1+a\eta_3+\eta_3\eta_1+\eta_{31},\\F&=f+a\eta_2+b\eta_1+\eta_1\eta_2+\eta_{12},\\G&=g+d\eta_1+e\eta_2+f\eta_3+a(\eta_2\eta_3+\eta_{23})+b(\eta_3\eta_1+\eta_{31})\\&\quad+c(\eta_1\eta_2+\eta_{12})+(\eta_1\eta_2\eta_3+\eta_1\eta_{23}+\eta_2\eta_{31}+\eta_3\eta_{12}+\eta_{123}).\end{aligned}\right.$$

Ne segue:

$$BC-D=bc-d-\eta_{23},\quad CA-E=ca-e-\eta_{31},\quad AB-F=ab-f-\eta_{12},$$

e quindi, distinguendo con una lineetta sovrapposta gl'invarianti dell'equazione (23):

$$\begin{aligned}\overline{L}&=A_2+AB-F=a_2+\eta_{12}+ab-f-\eta_{12}=L,\\\overline{l}&=A_3+CA-E=a_3+\eta_{13}+ca-e-\eta_{31}=l,\end{aligned}$$

e analogamente:

$$\overline{M}=M,\quad \overline{m}=m,\quad \overline{N}=N,\quad \overline{n}=n;$$

inoltre, colle notazioni in uso nella teoria delle funzioni simmetriche:

$$\begin{aligned}AD+BE+CF&=(ad+be+cf)+2\sum ab\eta_3+3\sum a\eta_2\eta_3\\&\quad+\sum a\eta_{23}+\sum d\eta_1+\sum\eta_1\eta_{23}+3\eta_1\eta_2\eta_3,\\2ABC+G&=2abc+2\sum ab\eta_3+3\sum a\eta_2\eta_3+g+\sum d\eta_1\\&\quad+\sum a\eta_{23}+\sum\eta_1\eta_{23}+3\eta_1\eta_2\eta_3+\eta_{123},\end{aligned}$$

quindi:

$$AD+BE+CF-2ABC-G=ad+be+cf-2abc-g-\eta_{123},$$

e infine:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} &= A_{23}+AD+BE+CF-2ABC-G\\ &= a_{23}+\eta_{123}+ad+be+cf-2abc-g-\eta_{123}=\lambda,\end{aligned}$$

$$\bar{\mu}=\mu, \qquad \bar{\nu}=\nu \text{ *)}.$$

7. Reciprocamente, se due equazioni della forma (2) hanno gl'invarianti corrispondenti eguali, esiste una trasformazione del tipo (22) che muta l'una di esse nell'altra.

Indichiamo con $a, b, \ldots$; $A, B, \ldots$ i coefficienti delle due equazioni, con $L, M, \ldots$; $\bar{L}, \bar{M}, \ldots$ i loro invarianti. Per l'ipotesi fatta si ha:

$$\bar{L}-\bar{m}=A_2-B_1=L-m=a_2-b_1,$$

e così:

$$B_3-C_2=b_3-c_2, \qquad C_1-A_3=c_1-a_3,$$

da cui:

$$(A-a)_2=(B-b)_1, \quad (B-b)_3=(C-c)_2, \quad (C-c)_1=(A-a)_3.$$

Pertanto l'espressione:

$$(A-a)dx_1+(B-b)dx_2+(C-c)dx_3$$

è un differenziale esatto, che denoteremo con $d\eta$, sicchè:

$$A-a=\eta_1, \qquad B-b=\eta_2, \qquad C-c=\eta_3,$$

ossia:

$$A=a+\eta_1, \qquad B=b+\eta_2, \qquad C=c+\eta_3.$$

Dopo ciò dalla $\bar{n}=n$ segue:

$$\begin{aligned}D &= C_2+BC-c_2-bc+d=c_2+\eta_{23}+bc+b\eta_3+c\eta_2\\ &\quad +\eta_2\eta_3-c_2-bc+d=d+b\eta_3+c\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_{23},\end{aligned}$$

e analogamente:

$$E=e+c\eta_1+a\eta_3+\eta_3\eta_1+\eta_{31}, \quad F=f+a\eta_2+b\eta_1+\eta_1\eta_2+\eta_{12}.$$

Infine dalla $\bar{\lambda}=\lambda$ segue:

$$G=A_{23}-2ABC+AD+BE+CF-a_{23}+2abc-ad-be-cf+g,$$

e riducendo:

*) I risultati di questo numero e del precedente giustificano il nome di *invarianti* dato alle L, M, etc.

$$G = g + d\eta_1 + e\eta_2 + f\eta_3 + a(\eta_2\eta_3 + \eta_{23}) + b(\eta_3\eta_1 + \eta_{31}) + c(\eta_1\eta_2 + \eta_{12})$$
$$+ (\eta_1\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_{23} + \eta_2\eta_{31} + \eta_3\eta_{12} + \eta_{123}).$$

Il confronto delle espressioni trovate colle (24) dimostra che si può passare dalla prima alla seconda delle due equazioni considerate mediante la trasformazione (22), dove $\theta = e^{\eta}$.

8. Torniamo alla trasformazione di Laplace, e calcoliamo gl'invarianti dell'equazione trasformata, che contrassegneremo anche in questo caso con una lineetta sovrapposta. Tenendo conto delle (11), (15), (16), si trova:

$$(25)\begin{cases} \bar{L} = 2L - m - \varphi_{12}, & \bar{M} = M, \quad \bar{N} = l, \\ \bar{l} = 2l - N - \varphi_{13}, & \bar{m} = L, \quad \bar{n} = n, \\ \bar{\lambda} = 2\lambda - \mu + M_1 - \varphi_{123} = 2\lambda - \nu + n_1 - \varphi_{123}, & \bar{\mu} = \lambda + M_1, \quad \bar{\nu} = \lambda + n_1. \end{cases}$$

Osserviamo che in queste espressioni figurano i soli invarianti.

9. Perchè all'equazione trasformata (9) sia applicabile la trasformazione di Laplace:

$$Z' = P_2 + BZ = P_2 + bZ,$$

devono essere soddisfatte le condizioni che si deducono dalle (19) mediante permutazione ciclica, cioè:

$$\bar{\psi}_2 = \bar{\Psi}_2, \qquad \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}\bar{\psi}_2 = \bar{M}(\bar{m} - \bar{L}) + \bar{m}(\bar{M} - \bar{n}).$$

Queste divengono, per le (25):

$$\Phi_2 = \Psi_2, \qquad \lambda_2 + M_{12} - (\lambda + M_1)\Phi_2 = M(-L + m + \varphi_{12})$$
$$+ L(M - n) = Mm - Ln + M\varphi_{12}.$$

Ora dalla:

$$\varphi_1 = \Phi_1 = \frac{M_1}{M}$$

segue:

$$\varphi_{12} = \Phi_{12} = \frac{M_{12}}{M} - \frac{M_1 M_2}{M^2},$$

ossia:

$$M_{12} = M\varphi_{12} + M_1\Phi_2,$$

sicchè le precedenti divengono:

$$(26)\quad \Phi_2 = \Psi_2, \quad \lambda_2 - \lambda\Phi_2 = Mm - Ln = M(m - L) + L(M - n).$$

Dei coefficienti dell'equazione in Z' ci basterà calcolare i tre primi.

Si trova, applicando le formole (11), (15):

$$B' = B - \overline{\psi}_2, \qquad C' = C, \qquad A' = A_1,$$

ossia:

$$A' = a - \varphi_1, \qquad B' = b - \Phi_2, \qquad C' = c.$$

Gl'invarianti dell'equazione in Z' sono [vedi formole (25)]:

$$\overline{M}' = 2\,\overline{M} - \overline{n} - \overline{\psi}_{23}, \qquad \overline{N}' = \overline{N}, \qquad \overline{L}' = \overline{m},$$
$$\overline{m}' = 2\,\overline{m} - \overline{L} - \overline{\psi}_{21}, \qquad \overline{n}' = \overline{M}, \qquad \overline{l}' = \overline{l},$$
$$\overline{\mu}' = 2\overline{\mu} - \overline{\nu} + \overline{N}_2 - \overline{\psi}_{123} = 2\overline{\mu} - \overline{\lambda} + \overline{l}_2 - \overline{\psi}_{123}, \quad \overline{\nu}' = \overline{\mu} + \overline{N}_2, \quad \overline{\lambda}' = \overline{\mu} + \overline{l}_2,$$

ossia:

$$(27)\quad \begin{cases} \overline{L}' = L, & \overline{M}' = 2M - n - \Phi_{23}, \quad \overline{N}' = l, \\ \overline{l}' = 2\,l - N - \varphi_{13}, & \overline{m}' = m, \qquad \overline{n}' = M, \\ \overline{\lambda}' = \lambda + M_1 + 2\,l_2 - N_2 - \varphi_{123}, & \overline{\mu}' = \lambda + l_2 + 2\,M_1 - n_1 - \varphi_{123}, \\ \overline{\nu}' = \lambda + M_1 + l_2. & \end{cases}$$

10. Le condizioni perchè all'equazione in Z' sia applicabile la trasformazione di Laplace:

$$Z'' = P'_3 + C'Z' = P'_3 + c\,Z'$$

sono:

$$\overline{\omega}'_3 = \overline{\Omega}'_3, \qquad \overline{\nu}'_3 - \overline{\nu}'\,\overline{\omega}'_3 = \overline{N}'(\overline{n}' - \overline{M}') + \overline{n}'(\overline{N}' - \overline{l}').$$

Esse divengono, per le (27):

$$\Psi_3 = \varphi_3, \qquad \lambda_3 + M_{13} + l_{23} - (\lambda + M_1 + l_2)\Psi_3$$
$$= l(-M + n + \Phi_{23}) + M(-l + N + \varphi_{13}).$$

Ora dalla:

$$\Psi_3 = \varphi_3 = \frac{M_3}{M} = \frac{l_3}{l}$$

segue:

$$M_{13} = M_1\varphi_3 + M\varphi_{13} = M_1\Psi_3 + M\varphi_{13},$$
$$l_{23} = l_2\varphi_3 + l\varphi_{23} = l_2\Psi_3 + l\Phi_{23},$$

sicchè le precedenti divengono:

$$(28)\qquad \Psi_3 = \varphi_3, \quad \lambda_3 - \lambda\varphi_3 = M(N - l) + l(n - M).$$

Gl'invarianti dell'equazione in Z'' sono:

$$\overline{N}'' = 2\,\overline{N}' - \overline{l}' - \overline{\omega}'_{31}, \qquad \overline{L}'' = \overline{L}', \qquad \overline{M}'' = \overline{n}',$$
$$\overline{n}'' = 2\,\overline{n}' - \overline{M}' - \overline{\omega}'_{32}, \qquad \overline{l}'' = \overline{N}', \qquad \overline{m}'' = \overline{m}',$$
$$\overline{\nu}'' = 2\,\overline{\nu}' - \overline{\lambda}' + \overline{L}'_3 - \overline{\omega}'_{123} = 2\,\overline{\nu}' - \overline{\mu}' + \overline{m}'_3 - \overline{\omega}'_{123},$$
$$\overline{\lambda}'' = \overline{\nu}' + \overline{L}'_3, \qquad \overline{\mu}'' = \overline{\nu}' + \overline{m}'_3,$$

ossia, per le (20), (26), (27), (28):

$$(29)\begin{cases} \overline{L}'' = L, & \overline{M}'' = M, & \overline{N}'' = N, \\ \overline{l}'' = l, & \overline{m}'' = m, & \overline{n}'' = n, \\ \overline{\lambda}'' = \lambda + M_1 + l_2 + L_3, & \overline{\mu}'' = \mu + M_1 + l_2 + L_3, & \overline{\nu}'' = \nu + M_1 + l_2 + L_3. \end{cases}$$

11. Riassumendo, le condizioni perchè alla (2) possano applicarsi successivamente le 3 trasformazioni:

$$Z = p_1 + a z, \qquad Z' = P_2 + b Z, \qquad Z'' = P'_3 + c Z'$$

sono [vedi eq. (19), (26), (28)]:

$$(30) \qquad \varphi_1 = \Phi_1, \qquad \Phi_2 = \Psi_2, \qquad \Psi_3 = \varphi_3,$$

$$(31) \qquad \begin{cases} \lambda_1 - \lambda\varphi_1 = L(l - N) + l(L - m), \\ \lambda_2 - \lambda\Phi_2 = M(m - L) + L(M - n), \\ \lambda_3 - \lambda\varphi_3 = M(N - l) + l(n - M). \end{cases}$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, i primi 6 invarianti restano immutati, e gli ultimi 3 variano di una stessa quantità.

Dalle (30) segue:

$$l = Lp(x_2, x_3), \qquad L = Mq(x_3, x_1) \qquad M = lr(x_1, x_2),$$

e di qui:

$$(32) \qquad p(x_2, x_3)q(x_3, x_1)r(x_1, x_2) = 1.$$

Derivando logaritmicamente rispetto ad x_3 si ha:

$$\frac{p_3}{p} + \frac{q_3}{q} = 0,$$

donde risulta che $\frac{p_3}{p}$ e $\frac{q_3}{q}$ sono indipendenti rispettivamente da x_2 e da x_1, quindi dall'una e dall'altra. Si potrà scrivere pertanto, denotando con $\gamma'(x_3)$ una funzione della sola x_3:

$$\frac{p_3}{p} = -\frac{q_3}{q} = \frac{\gamma''(x_3)}{\gamma'(x_3)},$$

donde, indicando con $\alpha'(x_1)$ una funzione di x_1, con $\beta'(x_2)$ una funzione di x_2:

$$p = \frac{\gamma'(x_3)}{\beta'(x_2)}, \qquad q = \frac{\alpha'(x_1)}{\gamma'(x_3)},$$

e quindi per la (32):

$$r = \frac{\beta'(x_2)}{\alpha'(x_1)}.$$

Si ha dunque:

$$(33) \qquad L = l\frac{\beta'(x_2)}{\gamma'(x_3)}, \qquad M = l\frac{\beta'(x_2)}{\alpha'(x_1)}.$$

Dopo ciò, se si pone:

$$(34) \begin{cases} \lambda = l\beta'\tau, \\ M - n = P\beta'\gamma', \quad N - l = Q\gamma'\alpha', \quad L - m = R\alpha'\beta', \end{cases}$$

le (31) divengono, con qualche riduzione:

$$(35) \quad \tau_1 = \alpha'(R - Q), \quad \tau_2 = \beta'(P - R), \quad \tau_3 = \gamma'(Q - P);$$

inoltre la (21) può scriversi:

$$(36) \qquad \beta'\gamma' P_1 + \gamma'\alpha' Q_2 + a'\beta' R_3 = 0.$$

Dalle (35) si ha:

$$\alpha'(R_2 - Q_3) = \beta'(P_1 - R_1),$$

e quindi, in virtù della (36):

$$(37) \qquad \frac{R_1}{\alpha'} + \frac{R_2}{\beta'} + \frac{R_3}{\gamma'} = 0.$$

Alla stessa equazione differenziale soddisfanno, come si vede per ragioni di simmetria, P e Q; sicchè P, Q, R sono funzioni di due delle differenze $\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$, $\alpha - \beta$; posto per es.:

$$\alpha - \gamma = \xi, \qquad \beta - \gamma = \eta,$$

si ha:

$$(38) \qquad P = X(\xi, \eta), \qquad Q = Y(\xi, \eta), \qquad R = W(\xi, \eta).$$

Inoltre dalle (35) segue che anche τ soddisfa all'equazione differenziale (37); sicchè:

$$(39) \qquad \tau = F(\xi, \eta).$$

Distinguendo cogli indici 1, 2 le derivate di X, Y, W, F rispetto a ξ, η, si ha:

$$\tau_1 = \alpha' F_1, \qquad \tau_2 = \beta' F_2, \qquad \tau_3 = -\gamma'(F_1 + F_2),$$

e quindi dalle (35):

$$(40) \qquad X = W + F_2, \qquad Y = W - F_1.$$

Dopo ciò si ha, ponendo:

$$l = \alpha'\gamma' u$$

e tenendo conto delle (20), (33), (34), (38), (39), (40):

$$(41) \begin{cases} L = \alpha'\beta' u, & M = \beta'\gamma' u, & N = \alpha'\gamma'(u + W - F_1), \\ l = \alpha'\gamma' u, & m = \alpha'\beta'(u - W), & n = \beta'\gamma'(u - W - F_2), \\ \lambda = \alpha'\beta'\gamma' F u, & \mu = \alpha'\beta'\gamma'(Fu + W_1 + W_2), & \nu = \alpha'\beta'\gamma'(Fu + W_2 - F_{12}), \end{cases}$$

dove α, β, γ sono funzioni rispettivamente di x_1, x_2, x_3; u è una funzione delle tre x_1, x_2, x_3, e W, F sono funzioni delle due combinazioni $\xi = \alpha - \gamma$, $\eta = \beta - \gamma$.

12. Affinchè all'equazione ottenuta dopo l'applicazione successiva delle tre trasformazioni di Laplace possano di nuovo applicarsi ordinatamente le trasformazioni stesse, dovranno essere soddisfatte le (31) quando in esse [vedi eq. (29)] si ponga $\lambda + H$, $\mu + H$, $\nu + H$ in luogo di λ, μ, ν, essendo:

$$H = M_1 + l_2 + L_3. \tag{42}$$

Ne segue facilmente:

$$H_1 - H\varphi_1 = H_2 - H\Phi_2 = H_3 - H\varphi_3 = 0, \tag{43}$$

quindi:

$$d \lg H = \varphi_1 dx_1 + \Phi_2 dx_2 + \varphi_3 dx_3,$$

che, come si può verificare tenendo conto della prima delle (30), è un differenziale esatto. Integrando si ottiene:

$$H = C\beta' l = C\alpha'\beta'\gamma' u,$$

dove C denota una costante. Ne segue, in virtù delle (41), (42):

$$\frac{u_1}{\alpha'} + \frac{u_2}{\beta'} + \frac{u_3}{\gamma'} = Cu,$$

donde si ha, integrando:

$$u = e^{C\alpha} V(\xi, \eta),$$

e quindi:

$$l = \alpha'\gamma' e^{C\alpha} V(\xi, \eta). \tag{44}$$

13. Dopo una nuova applicazione delle tre trasformazioni di Laplace, i tre ultimi invarianti aumenteranno un'altra volta della stessa quantità H; e però all'equazione ottenuta saranno ulteriormente applicabili le tre trasformazioni. Dunque, se l'equazione ottenuta dopo un primo ciclo di trasformazioni è ulteriormente trasformabile, lo sono pure quelle che si ottengono dopo un numero qualunque di cicli.

14. È notevole il caso in cui $H = 0$; allora l'equazione ottenuta mediante le tre trasformazioni ha gli stessi invarianti della primitiva, e quindi (n° 7) può ottenersi da essa mediante una trasformazione della

forma (22) *). Si ha in questo caso dalle (41), (44):

$$L=\alpha'\beta' V,\quad M=\beta'\gamma' V,\quad N=\alpha'\gamma'(V+W-F_1),$$
$$l=\alpha'\gamma' V,\quad m=\alpha'\beta'(V-W),\quad n=\beta'\gamma'(V-W-F_2),$$
$$\lambda=\alpha'\beta'\gamma' FV,\quad \mu=\alpha'\beta'\gamma'(FV+W_1+W_2),\quad \nu=\alpha'\beta'\gamma'(FV+W_2-F_{12}).$$

Messina, dicembre 1899.

G. Vivanti.

*) Questa trasformazione è:

$$z=\frac{1}{\alpha'\beta'\gamma' V}Z.$$

Si noti però che essa è diversa da quella che si ottiene componendo le tre trasformazioni di Laplace.

SULLA RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI REALI DI VARIABILI REALI MEDIANTE SERIE DI POLINOMI RAZIONALI INTERI.

Memoria del Dr. **Carlo Severini**, alla Spezia.

Adunanza dell'11 febbrajo 1900.

Negli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino » *) ho pubblicato alcune Note: *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabile reale.*

Supposta la funzione data $\varphi(x)$ reale, ad un valore, finita ed integrabile in un intervallo finito $(a \ldots b)$, ho dimostrato che si può costruire, in infiniti modi, un polinomio razionale intero di x, che, a meno di una quantità positiva, assegnata a piacere, rappresenta la $\varphi(x)$ in un campo $[a, b]$, composto di un numero finito di tratti, presi nell'intervallo $(a \ldots b)$ e prossimo a questo intervallo quanto si vuole. Nel caso speciale che tra a e b il gruppo dei punti di discontinuità sia un gruppo *rinchiudibile,* ho anche fatto vedere come si possa in un campo $[a, b]'$, il quale si ottiene da $(a \ldots b)$ escludendone i punti di discontinuità con un numero finito d'intorni, la cui somma sia piccola a piacere, rappresentare la $\varphi(x)$, in infiniti modi, mediante una serie di polinomi razionali interi, *che in quel campo converge assolutamente ed in egual grado.*

Recentemente il sig. R. Baire, in una interessante Memoria: *Sur les fonctions de variables réelles* **) ha preso tra l'altro a studiare le funzioni di una variabile reale che sono atte ad essere rappresentate mediante una serie di polinomi razionali interi *in tutto un intervallo,* ed ha determinato la condizione necessaria e sufficiente che le caratterizza.

*) Vol. XXXIII e XXXIV.

**) Milano, Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C., 1899.

In seguito alla pubblicazione di questa Memoria ho eseguito una serie di ricerche, le quali formano l'oggetto del presente lavoro.

Il primo n° contiene anzitutto un confronto tra la condizione, che la $\varphi(x)$ sopra detta sia integrabile nell'intervallo $(a \ldots b)$, e la condizione necessaria e sufficiente, perchè ivi sia rappresentabile mediante una serie di polinomi razionali interi. A questo confronto tengono dietro altre considerazioni, dirette a completare le ricerche, esposte nelle Note precedenti, ed a mostrare principalmente, come il metodo in esse seguito possa in molti casi essere adoperato per costruire una serie di polinomi razionali interi, che in un intervallo dato rappresenta una data funzione.

Nel secondo n° è indicato un metodo, basato su considerazioni analoghe alle precedenti, per ottenere, sotto opportune condizioni, una serie di polinomi razionali interi di due variabili reali, la quale rappresenti in un dato rettangolo una funzione delle stesse variabili, reale, ad un valore, finita.

Questa parte si collega strettamente col problema di rappresentare mediante una serie di polinomi razionali interi una funzione di una sola variabile reale, soddisfacente alle occorrenti condizioni, giacchè può servire in base ai risultati del sig. Baire (il metodo che ne risulta è anzi generale) a formare tale serie.

I.

Funzioni di una variabile.

1. Richiamiamo anzitutto alcune definizioni *).

Consideriamo in un intervallo finito $(a \ldots b)$ un gruppo perfetto di punti E ed il gruppo corrispondente dei valori, che nei punti di E prende una funzione $\varphi(x)$, data in quell'intervallo, reale, finita, ad un valore.

In un punto x_E appartenente ad E si dirà *oscillazione di* $\varphi(x)$ *rispetto ad* E il limite D_{x_E}, a cui tende la differenza tra il limite superiore ed il limite inferiore dei valori, che la $\varphi(x)$ prende nei punti di E, contenuti nell'intorno $(x_E - h \ldots x_E + h)$, quando la quantità positiva h tende a zero.

*) Cfr. Baire, l. c., §§ 26 e 27.

La funzione $\varphi(x)$ sarà detta *continua in* x_E *rispetto ad* E, se $D_{x_E} = 0$, *discontinua in* x_E *rispetto ad* E nel caso contrario; ed analogamente a quanto avviene nel caso ordinario, in cui il gruppo perfetto E è composto di tutti i punti di $(a \dots b)$, sarà la $\varphi(x)$ *continua, puntualmente discontinua, totalmente discontinua rispetto ad* E secondo che in ogni punto di E si ha $D_{x_E} = 0$, ovvero esistono punti di E ove $D_{x_E} > 0$, ma in ogni parte di $(a \dots b)$, che contiene internamente punti di E, vi sono dei punti di E nei quali $D_{x_E} = 0$, ovvero finalmente esiste una parte di $(a \dots b)$, contenente internamente punti di E, in ognuno dei quali è $D_{x_E} > 0$.

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè la $\varphi(x)$ sia rappresentabile nell'intervallo $(a \dots b)$ mediante una serie di polinomi razionali interi si esprime allora dicendo, che essa deve essere ***puntualmente discontinua rispetto ad ogni gruppo perfetto, preso in quell'intervallo.***

Facciamo vedere che l'ipotesi, che la $\varphi(x)$ sia nell'intervallo $(a \dots b)$ atta all'integrazione, non è sufficiente, perchè si possa dire soddisfatta questa condizione.

Consideriamo a tal'uopo un gruppo perfetto E_1 qualsivoglia, contenuto nell'intervallo $(a \dots b)$, e rinchiudibile; ed indichiamo con $\varphi_{E_1}(x)$ una funzione, definita nell'intervallo $(a \dots b)$, reale, finita e totalmente discontinua rispetto ad E_1. Chiamiamo poi con $\bar{\varphi}(x)$ una nuova funzione, definita anch'essa nell'intervallo $(a \dots b)$, in modo, che si abbia:

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$$

in ogni punto non appartenente ad E_1, e nei punti di E_1:

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi_{E_1}(x).$$

La nuova funzione $\bar{\varphi}(x)$ è certamente atta all'integrazione nell'intervallo $(a \dots b)$, giacchè è sempre rinchiudibile il gruppo dei punti, nei quali oscilla per più di un numero positivo σ qualsivoglia; non è però ivi rappresentabile mediante una serie di polinomi razionali interi, perchè totalmente discontinua rispetto ad E_1.

L'integrabilità della $\varphi(x)$ non è nemmeno condizione necessaria, perchè sia possibile questa rappresentazione.

Ciò appare subito manifesto se si pensa, che la derivata di una funzione continua, purchè esista determinata in ogni punto, è sempre rappresentabile mediante una serie di polinomi razionali interi *), mentre

*) Cfr. Baire, l. c., § 57.

d'altra parte si ha esempio di funzioni, la cui derivata non è atta all'integrazione *).

Del resto è pienamente conosciuta la condizione necessaria e sufficiente, affinchè una serie di funzioni integrabili, in particolare continue, ed inferiori tutte ad un numero assegnabile, rappresenti una funzione integrabile **).

2. Per dare esempio di funzioni, che siano ad un tempo atte alla integrazione e capaci di essere rappresentate mediante serie di polinomi razionali interi, citiamo quelle, i cui punti di discontinuità formano nel dato intervallo $(a \dots b)$ un gruppo numerabile.

Si verifica anzitutto facilmente, che tali funzioni sono puntualmente discontinue rispetto ad ogni gruppo perfetto di punti.

La cosa è intanto evidente se si tratta del gruppo formato da tutti i punti di $(a \dots b)$.

Per ogni altro gruppo perfetto E si consideri una parte $(a_1 \dots b_1)$ qualsivoglia di $(a \dots b)$, contenente internamente punti di E. Se questi punti (o una parte di essi), costituiscono uno o più tratti continui, determinati, appartenenti ad $(a_1 \dots b_1)$, è chiaro che il gruppo di tutti i punti di E interni ad $(a_1 \dots b_1)$ non può essere un gruppo numerabile. Nel caso contrario siano a'_1 e b'_1 due punti di $(a_1 \dots b_1)$, non appartenenti ad E, e tali che $(a'_1 \dots b'_1)$ contenga punti di E. Questi, come è facile vedere, costituiscono un gruppo, che è anch'esso perfetto e quindi non numerabile.

Segue da ciò che tra a_1 e b_1 devono sempre esistere dei punti appartenenti ad E, che non sono per la funzione data punti di discontinuità. In questi punti l'oscillazione rispetto ad E sarà a maggior ragione uguale a zero.

Per dimostrare la seconda parte della nostra asserzione, osserviamo che se in un punto x_0 la funzione data oscilla per meno di un numero positivo σ, esiste necessariamente un intorno di x_0 nel quale la differenza tra il limite superiore ed il limite inferiore dei valori di quella funzione è minore di σ. Allora in ogni punto preso entro una porzione qualunque

*) Cfr. Volterra: *Sui principii del calcolo integrale;* Giornale di Battaglini, 1884.

**) Cfr. Prof. Arzelà: *Sulle serie di funzioni;* Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna, 1899 e 1900.

di quell'intorno, non avente con questo nessun estremo a comune e contenente x_0, l'oscillazione è minore di σ; e però il punto x_0 non è un punto limite del gruppo dei punti, nei quali l'oscillazione è maggiore od uguale a σ.

Questo gruppo è dunque *chiuso*, e, dovendo per l'ipotesi fatta risultare anche numerabile, ne segue che esso è *riducibile*.

Ciò basta a dimostrare che nell'intervallo $(a \ldots b)$ la funzione considerata è integrabile; anzi possiamo enunciare il seguente teorema:

Ogni funzione reale, ad un valore e finita, la quale ammetta in un intervallo finito un gruppo numerabile di punti di discontinuità, è in quell'intervallo atta all'integrazione.

Tra le funzioni, i cui punti di discontinuità formano un gruppo numerabile, sono in modo speciale da ricordare le *funzioni a variazione limitata;* e come altro esempio possiamo ancora citare quelle, che hanno soltanto discontinuità, che si possono togliere *).

Il sig. Lebesgue in una Nota: *Sur l'approximation des fonctions* **) si è particolarmente occupato delle funzioni, i cui punti di discontinuità formano un gruppo numerabile.

3. Presupposta per la funzione data $\varphi(x)$ l'integrabilità, e definita per ogni valore reale di x una nuova funzione $\varphi_1(x)$ mediante le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{lcc} \varphi_1(x) = \varphi(a) & \text{per} & x \leqq a \\ \varphi_1(x) = \varphi(x) & \text{»} & a < x < b \\ \varphi_1(x) = \varphi(b) & \text{»} & x \geqq b, \end{array}$$

c'è luogo a considerare, come ho mostrato nelle Note sopra citate, la funzione

$$F(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

dove u è una seconda variabile reale, k una quantità positiva, indipendente da x ed u, e $\psi(x)$ una funzione reale, ad un valore per ogni valore reale di x, avente un limite superiore finito per i suoi valori asso-

*) Cfr. Bettazzi: *Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale;* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. VI, 1892.

**) Bulletin des Sciences Mathématiques, Novembre 1898.

luti, e che soddisfa di più alle condizioni di essere pari, di non cambiare mai segno e di ammettere determinato e finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \psi(x)\,dx = 2\omega:$$

per ogni coppia di valori fissati per x e k l'integrale

$$\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

esiste determinato e finito.

Sostituendo u ad $\frac{u-x}{k}$ si può scrivere:

$$F(x,\,k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x+ku)\,\psi(u)\,du.$$

Se quindi G indica il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$, e c una quantità positiva, tale che riesca:

$$\frac{G}{\omega}\int_{c}^{\infty} \psi(x)\,dx < \frac{\sigma}{3},$$

σ essendo il solito numero positivo, piccolo a piacere, si otterrà a maggior ragione:

$$\left|F(x,\,k) - \frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{+c} \varphi_1(x+ku)\,\psi(u)\,du\right| < \frac{\sigma}{3}.$$

Si fissi ora un valore $\bar{x}$ di x e si chiami con $D_{\bar{x}}$ l'oscillazione della $\varphi_1(x)$ in quel punto.

Sarà possibile determinare un intorno $(\bar{x}-\varepsilon \ldots \bar{x}+\varepsilon)$ del punto $\bar{x}$ (ε quantità positiva), tale che per ogni punto x di esso risulti:

$$|\varphi_1(x) - \varphi_1(\bar{x})| < D_{\bar{x}} + \frac{\sigma}{3}.$$

Se pertanto $\bar{k}$ indica un numero siffatto, che i punti $\bar{x}+\bar{k}c$, $\bar{x}-\bar{k}c$ appartengano all'intorno $(\bar{x}-\varepsilon \ldots \bar{x}+\varepsilon)$, per ogni k minore od uguale a $\bar{k}$ risulterà:

$$\left|\frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{+c} [\varphi_1(\bar{x}) - \varphi_1(\bar{x}+ku)]\,\psi(u)\,du\right| < D_{\bar{x}} + \frac{\sigma}{3};$$

ed osservando che si può scrivere:

$$\varphi_1(\bar{x}) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\bar{x})\,\psi(u)\,du$$

e quindi:

$$\left|\varphi_1(\bar{x}) - \frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{+c} \varphi_1(\bar{x})\psi(u)\,du\right| < \frac{\sigma}{3},$$

verrà in ultimo, tutte le volte che k è minore od uguale a $\bar{k}$:

$$(1) \qquad |F(\bar{x}, k) - \varphi_1(\bar{x})| < D_{\bar{x}} + \sigma.$$

OSSERVAZIONE.—Dalle Memorie di Weierstrass: *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter wilkürlichen Functionen einer reellen Weränderlichen* (Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885) si ha, supponendo la funzione data $\varphi(x)$ continua, che la $F(x, k)$, al decrescere del parametro k, tende in egual grado a $\varphi(x)$, in tutto l'intervallo $(a \ldots b)$; e a questo teorema di Weierstrass fa riscontro nei miei lavori sopra citati l'altro che, nelle ipotesi qui poste per la $\varphi(x)$, si può, dati due numeri σ e λ, positivi, piccoli a piacere e tra loro indipendenti, escludere dall'intervallo $(a \ldots b)$ un numero finito di tratti, che sommati diano una quantità minore di λ, in modo che nella parte rimanente, per valori di k, che non superano un determinato limite k', opportunamente scelto, risulti:

$$|F(x, k) - \varphi(x)| < \sigma.$$

È da osservare che la formola (1), per il modo come è stata ottenuta, comprende entrambi questi teoremi.

Infatti nel caso di una funzione continua l'oscillazione D_x è in ogni punto x sempre uguale a zero, mentre, se la funzione è supposta solo integrabile, è rinchiudibile il gruppo dei punti, nei quali D_x è maggiore od uguale ad un numero positivo, comunque preso. La convergenza uniforme nell'intervallo $(a \ldots b)$, per k che va a zero, di $F(x, k)$ verso $\varphi(x)$, se questa è supposta continua, ovvero la possibilità di determinare k', se la $\varphi(x)$ è semplicemente integrabile, risultano poi immediatamente in base al noto teorema di Cantor sulla continuità e all'estensione che di questo si può fare alle funzioni discontinue *).

4. La formola (1) dimostra che la $\varphi(x)$ rappresenta il limite, a cui tende $F(x, k)$, quando k va a zero, in ogni punto x, nel quale essa è continua.

---

*) Vedasi la prima delle mie Note citate in principio, § 4.

Se si scinde la $F(x, k)$ nella somma delle due funzioni

$$\frac{1}{2} F_1(x, k), \qquad \frac{1}{2} F_2(x, k),$$

ove:

$$F_1(x, k) = \frac{1}{\omega} \int_0^\infty \varphi_1(x + ku)\psi(u)du,$$

$$F_2(x, k) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^0 \varphi_1(x + ku)\psi(u)du$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^\infty \varphi_1(x - ku)\psi(u)du,$$

con procedimento analogo si trova, che in ogni punto x nel quale si ha per $\varphi(x)$ continuità o discontinuità di prima specie, la $F_1(x, k)$ e la $F_2(x, k)$ tendono, al decrescere di k, ad un limite determinato e finito, e precisamente che:

$$\lim_{k=0} F_1(x, k) = \varphi_1(x + 0),$$

$$\lim_{k=0} F_2(x, k) = \varphi_1(x - 0).$$

Ricerchiamo ora una condizione sotto la quale si possa dire, dato un punto $\bar{x}$ di $(a \ldots b)$, che una delle tre funzioni $F(x, k)$, $F_1(x, k)$, $F_2(x, k)$ tende, al decrescere di k, ad un limite determinato e finito, anche se nel punto $x = \bar{x}$ la $\varphi(x)$ ammette una discontinuità di seconda specie.

Supponiamo che esista un valore A tale che, preso un numero positivo σ, piccolo a piacere, si possa determinare un altro numero ε, anch'esso positivo, in modo che nel tratto $(\bar{x} - \varepsilon \ldots \bar{x} + \varepsilon)$, ovvero nel tratto $(\bar{x} \ldots \bar{x} + \varepsilon)$, ovvero finalmente nel tratto $(x - \varepsilon \ldots \bar{x})$ sia uniformemente denso il gruppo dei punti, nei quali la $\varphi_1(x)$ differisce da A per meno di σ in valore assoluto.

Ricordando che nel caso, come è quello da noi ora considerato, di una funzione finita si dice che un numero finito B è per questa funzione in un punto x un *confine,* per esempio a destra, se, fissato il solito σ, è possibile determinare ε' in modo che, per ogni numero positivo ε'' minore di ε', sempre esistono fra x ed $x + \varepsilon''$ (x escluso) dei punti, nei quali la funzione differisce da B in valore assoluto per meno di σ *);

*) Cfr. Bettazzi, l. c.

riesce naturale di chiamare il valore A, soddisfacente alla detta condizione (si vedrà che quando questo valore esiste, è necessariamente unico) *confine principale* ovvero *confine principale a destra*, ovvero *confine principale a sinistra di* $\varphi_1(x)$ *per* $x = \bar{x}$, secondo che si considera l'intorno $(\bar{x} - \varepsilon \ldots \bar{x} + \varepsilon)$, ovvero l'intorno $(\bar{x} \ldots \bar{x} + \varepsilon)$, ovvero l'intorno $(\bar{x} - \varepsilon \ldots \bar{x})$.

Per fissare le idee sia A ad esempio il confine principale a destra di $\varphi_1(x)$ per $x = \bar{x}$.

È facile vedere che si ha:

$$\lim_{k=0} F_1(\bar{x}, k) = A.$$

Infatti indicando con σ e c due quantità positive, delle quali l'una è al solito piccola a piacere, e l'altra è tale che riesca:

$$\frac{G}{\omega}\int_c^\infty \psi(u)\,du < \sigma,$$

risulta:

$$\left|F_1(x, k) - \frac{1}{\omega}\int_0^c \varphi_1(x + ku)\psi(u)\,du\right| < \sigma,$$

e nel tempo stesso:

$$\left|A - \frac{A}{\omega}\int_0^c \psi(u)\,du\right| < \sigma.$$

Consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{\omega}\int_0^c [\varphi_1(x + ku) - A]\psi(u)\,du.$$

Sarà:

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_0^c [\varphi_1(x + ku) - A]\psi(u)\,du\right| \leqq \frac{1}{\omega}\int_0^c |\varphi_1(x + ku) - A|\psi(u)\,du;$$

e se k_1 è un valore determinato del parametro k siffatto, che si abbia:

$$k_1 c < \varepsilon,$$

ε essendo la quantità sopra detta, tutte le volte che k è minore od uguale a k_1 risulterà, come subito si verifica in base alla definizione stessa di integrale:

$$\frac{1}{\omega}\int_0^c |\varphi_1(\bar{x} + ku) - A|\psi(u)\,du < \sigma,$$

e quindi:

$$|F_1(\bar{x}, k) - A| < 3\sigma.$$

Siccome il numero σ può essere preso piccolo a piacere, si conclude, come avevamo asserito, che:

$$\lim_{k=0} F_1(\bar{x}, k) = A.$$

L'unicità del valore confine principale, qualunque esso sia, risulta immediatamente da questo risultato.

Notiamo anche che se nel punto $x = \bar{x}$ esistono per $\varphi_1(x)$ il confine principale a destra A_1 ed il confine principale a sinistra A_2, e questi due confini principali non coincidono, la $F(\bar{x}, k)$ tende del pari ad un limite determinato e finito, quando k va a zero, e si ha:

$$\lim_{k=0} F(x, k) = \frac{A_1 + A_2}{2}.$$

Finalmente per dare esempio di una funzione $\varphi_2(x)$, per la quale risulti in ogni punto:

$$\lim_{k=0} F_1(x, k) = \varphi_2(x),$$

citiamo la funzione punteggiata discontinua, definita nell'intervallo $(0 \ldots 1)$ nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll} \varphi_2(x) = 1 & \text{per} & \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \\ \varphi_2(x) = \frac{1}{2} & » & \frac{1}{2^2} \leqq x < \frac{1}{2} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \varphi_2(x) = \frac{1}{2^n} & » & \frac{1}{2^{n+1}} \leqq x < \frac{1}{2^n} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \end{array}$$ *).

5. Se per ogni punto x dell'intervallo $(a \ldots b)$ è soddisfatta una delle tre uguaglianze seguenti:

$$\lim_{k=0} F(x, k) = \varphi(x),$$
$$\lim_{k=0} F_1(x, k) = \varphi(x),$$
$$\lim_{k=0} F_2(x, k) = \varphi(x),$$

ad esempio la seconda (ciò accade sempre, se in ogni punto esiste per

*) Cfr. Dini: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, § 62.

la funzione $\varphi_1(x)$ il confine principale a destra, e questo coincide col valore della funzione medesima in quel punto), indicando con

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_\nu,\ \ldots$$

una successione di numeri positivi, decrescenti e tendenti allo zero, si potrà scrivere per tutto l'intervallo $(a \ldots b)$:

$$\varphi(x) = F_1(x, k_1) + \sum_1^\infty{}_\nu [F_1(x, k_{\nu+1}) - F_1(x, k_\nu)].$$

I termini della serie che è al secondo membro sono funzioni continue di x, se tale si sceglie la $\psi(x)$ *), e quindi possono essere rappresentati con qualsivoglia approssimazione mediante polinomi razionali interi in tutto l'intervallo $(a \ldots b)$.

La costruzione di questi polinomi si effettua poi assai facilmente, se si pongono per la funzione $\psi(x)$ altre convenienti ipotesi **).

Sia dunque

$$G_1^{(1)}(x),\quad G_2^{(1)}(x),\quad \ldots,\quad G_\nu^{(1)}(x),\quad \ldots$$

una successione di polinomi razionali interi di x, soddisfacenti nell'intervallo $(a \ldots b)$ alla condizione

$$|F_1(x, k_\nu) - G_\nu^{(1)}(x)| < \sigma_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

indicando con

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_\nu,\ \ldots$$

una successione di numeri positivi, soggetti alle condizioni

$$\sigma_\nu > \sigma_{\nu+1}, \qquad \lim_{k=0} \sigma_\nu = 0.$$

Risulterà in tutti i punti di $(a \ldots b)$:

$$\varphi(x) = G_1^{(1)}(x) + \sum_1^\infty{}_\nu [G_{\nu+1}^{(1)}(x) - G_\nu^{(1)}(x)].$$

I termini di questa serie sono polinomi razionali interi, ed è chiaro, per quanto abbiamo sopra detto, che essa converge in egual grado in ogni parte di $(a \ldots b)$ non contenente punti di discontinuità per la funzione data $\varphi(x)$.

Osservazione. — Se consideriamo nel dato intervallo $(a \ldots b)$ una funzione ad integrale nullo [tale è ad esempio quella, che in ogni punto ha per valore il valore in quel punto della oscillazione di una funzione

*) Vedasi la terza delle mie Note citate in principio, § 3.

**) Vedasi la prima delle mie Note citate in principio, §§ 2 e 3.

finita ed integrabile tra a e b *)], per essa lo zero rappresenta il confine principale in ogni punto interno ad ($a \ldots b$) e nei punti a e b rispettivamente il confine principale a destra ed il confine principale a sinistra. Ne segue che se si hanno due funzioni, la cui differenza è una funzione ad integrale nullo, e per una di esse è possibile, mediante il metodo sopra esposto, costruire una serie di polinomi razionali interi, che la rappresenta nell'intervallo considerato, quel medesimo metodo non può servire anche per l'altra funzione.

II.

Funzioni di due variabili.

6. Si consideri nel piano delle due variabili reali x ed y il rettangolo individuato dalle limitazioni

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$
$$\gamma \leqq y \leqq \delta,$$

α, β, γ, δ essendo quattro quantità, reali, finite.

Per tutti i punti di questo rettangolo sia $f(x, y)$ una funzione reale, finita, ad un valore, continua rispetto ad x in tutto l'intervallo ($\alpha \ldots \beta$) per ogni valore fissato di y, e tale infine che, indicando con D l'oscillazione di essa in un punto (cioè il limite, a cui tende l'ordinaria oscillazione, calcolata in un intorno che contiene quel punto internamente, quando la massima corda di questo intorno tende a zero) sia nell'intervallo ($\alpha \ldots \beta$) di ogni retta $y = \bar{y}$, ove:

$$\gamma \leqq \bar{y} \leqq \delta,$$

rinchiudibile il gruppo dei punti, appartenenti ad esso intervallo, nei quali D è maggiore di un numero positivo, comunque scelto.

Pei valori α e β di x si ponga anche la continuità rispetto ad y.

Si consideri per tutti i punti della striscia di piano, individuata dalle rette $y = \gamma$, $y = \delta$, la funzione $f_1(x, y)$, definita nel seguente modo: nel rettangolo

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$
$$\beta \leqq y \leqq \delta$$

*) Questa particolare funzione ad integrale nullo è rappresentabile mediante una serie di polinomi razionali interi. Cfr. Baire, l. c., §§ 11 e 56.

si ha:

$$f_1(x, y) = f(x, y);$$

nel resto:

$$f_1(x, y) = f(\beta, y),$$

se x è maggiore di β, ed

$$f_1(x, y) = f(\alpha, y),$$

se x è minore di α.

Sotto le ipotesi poste per $\psi(x)$ al § 3, u e k avendo il significato ivi detto, esisterà determinato e finito per ogni terna di valori fissati per x, y e k ($\gamma \leqq y \leqq \delta$) l'integrale

$$\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u, y)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du.$$

7. Prendiamo a considerare la

$$\Phi(x, y, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u, y)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

che per ogni valore dato a k rappresenta una funzione delle due variabili x ed y, definita in tutti i punti del piano, pei quali:

$$\gamma \leqq y \leqq \delta;$$

ed osserviamo che in ognuno di tali punti essa tende, quando k va a zero, al limite $f_1(x, y)$. Per ogni y fisso vi tende poi uniformemente per tutti i valori di x compresi in un intervallo finito qualsivoglia.

Essendo l'integrale

$$\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u, y)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x+ku, y)\,\psi(u)\, du$$

convergente uniformemente per tutti i valori di x, y e k ($\gamma \leqq y \leqq \delta$), e rappresentando

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-d}^{+d} f_1(x+ku, y)\,\psi(u)\, du,$$

ove d è una quantità positiva qualsivoglia, una funzione continua rispetto ad x, giacchè tale è per ogni terna di valori dati ad y, k ed u la $f_1(x+ku, y)\psi(u)$ *), ne discende che continua rispetto ad x è anche la $\Phi(x, y, k)$.

---

*) Cfr. Prof. Arzelà: *Sugli integrali di funzioni che oltre alla variabile d'integrazione contengono altre variabili;* Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 25 novembre 1888.

È facile dimostrare che questa gode della medesima proprietà rispetto ad y.

Basterà che consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-d}^{+d} f_1(\bar{x}+\bar{k}u, y)\psi(u)\,du,$$

$\bar{x}$ e $\bar{k}$ essendo una coppia di valori di x e k comunque scelta.

Osserviamo, che mentre u varia da $-d$ a $+d$, l'espressione $\bar{x}+\bar{k}u$ varia da $\bar{x}-\bar{k}d$ ad $\bar{x}+\bar{k}d$.

Se risulta, nella peggiore ipotesi:

$$\bar{x}-\bar{k}d < \alpha < \beta < \bar{x}+\bar{k}d,$$

possiamo scomporre l'integrale

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-d}^{+d} f_1(\bar{x}+\bar{k}u, y)\psi(u)\,du$$

nella somma dei tre integrali:

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-d}^{\frac{\alpha-\bar{x}}{\bar{k}}} f_1(\bar{x}+\bar{k}u, y)\psi(u)\,du,$$

$$\frac{1}{2\omega}\int_{\frac{\alpha-\bar{x}}{\bar{k}}}^{\frac{\beta-\bar{x}}{\bar{k}}} f_1(\bar{x}+\bar{k}u, y)\psi(u)\,du,$$

$$\frac{1}{2\omega}\int_{\frac{\beta-\bar{x}}{\bar{k}}}^{+d} f_1(\bar{x}+\bar{k}u, y)\psi(u)\,du.$$

Per le ipotesi poste sulla $f(x, y)$, e per quanto abbiamo detto un momento fa, è chiaro che il primo e l'ultimo integrale rappresentano ciascuno una funzione continua di y; la questione si riduce quindi a far vedere che ciò vale anche per l'altro integrale.

Verifichiamo a tal'uopo che nell'intervallo $\left(\frac{\alpha-\bar{x}}{\bar{k}} \ldots \frac{\beta-\bar{x}}{\bar{k}}\right)$ di ogni retta $y=\bar{y}$ $(\gamma \leqq \bar{y} \leqq \delta)$ è rinchiudibile il gruppo dei punti, appartenenti ad esso intervallo, nei quali l'oscillazione D della $f_1(\bar{x}+\bar{k}u, y)\psi(u)$ è maggiore di un numero positivo σ, piccolo a piacere.

Fatto questo per un teorema, che ho stabilito in un altro mio lavoro *), la dimostrazione sarà completa.

Fissato dunque un numero positivo g qualsivoglia, prendiamo nell'intervallo $\left(\frac{\alpha - \bar{x}}{\bar{k}} \ldots \frac{\beta - \bar{x}}{\bar{k}}\right)$ della retta $y = \bar{y}$ che si considera, un punto $\bar{u}\,\bar{y}$, nel quale l'oscillazione D della $f_1(\bar{x} + \bar{k}u, y)$ sia minore di g.

Il valore $\bar{u}$ sia poi tale che nel punto $u = \bar{u}$ della $y = 0$ la $\psi(u)$ oscilli anch'essa per meno di g.

Potremo descrivere un intorno C del punto $\bar{u}\,\bar{y}$, ad esempio circolare, col centro in $\bar{u}\,\bar{y}$, in modo che in esso si abbia:

$$L - l < g,$$

essendo L ed l rispettivamente il limite superiore ed il limite inferiore di $f_1(\bar{x} + \bar{k}u, y)$ nel campo C.

Parimenti sulla retta $y = 0$ potremo determinare un intorno $(\bar{u} - h \ldots \bar{u} + h)$, nel quale:

$$L' - l' < g,$$

ove L' ed l' sono rispettivamente il limite superiore ed il limite inferiore di $\psi(u)$ in quell'intorno.

Se come raggio di un intorno circolare C', avente ancora il centro in $\bar{u}\,\bar{y}$, si prende una lunghezza r', soggetta alla condizione di essere minore di h e del raggio r del cerchio C, è chiaro che in C' il limite superiore della funzione $f_1(\bar{x} + \bar{k}u, y)\psi(u)$ non è maggiore di LL' ed il limite inferiore non è minore di ll'.

Ma si può scrivere

$$LL' - ll' = LL' - Ll' + Ll' - ll' = L(L' - l') + l'(L - l);$$

quindi si ha, indicando con L'' ed l'' i limiti, superiore ed inferiore, della $f_1(\bar{x} + \bar{k}u, y)\psi(u)$ nel campo C':

$$L'' - l'' < (|L| + |l'|)g,$$

ed a maggior ragione

$$L'' - l'' < g(G' + G''),$$

ove G' e G'' sono i limiti superiori dei valori assoluti rispettivamente di $\psi(x)$ ed $f(x, y)$.

---

*) *Sulle funzioni di variabile reale rappresentate da integrali definiti*, § 4. Palermo, Tipografia Matematica, 1899.

Se il numero g viene in precedenza scelto in modo che si abbia:

$$g < \frac{\sigma}{G' + G''},$$

risulta:

$$L'' - l'' < \sigma;$$

ed allora nel punto $\overline{u}\,\overline{y}$ l'oscillazione D della $f_1(\overline{x} + \overline{k}u, y)\psi(u)$ è necessariamente minore di σ.

Nell'intervallo $\left(\frac{\alpha - \overline{x}}{\overline{k}} \dots \frac{\beta - \overline{x}}{\overline{k}}\right)$ della retta $y = \overline{y}$, eccettuati i punti di un gruppo rinchiudibile, tutti gli altri soddisfano alle condizioni imposte al punto $\overline{u}\,\overline{y}$: resta quindi senz'altro dimostrato ciò che noi abbiamo asserito.

Osservazione.—Questa proprietà discende assai facilmente, per quanto abbiamo sopra detto, se la $f(x, y)$ soddisfa alla condizione di essere in ogni punto del rettangolo

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$
$$\gamma \leqq y \leqq \delta$$

continua anche rispetto ad y.

8. Poniamo ora che la funzione $\psi(x)$, oltre a godere delle dette proprietà, ammetta infinite derivate finite e continue su tutto l'asse reale, le quali siano integrabili da $-\infty$ a $+\infty$, anche se vengono prese in valore assoluto.

Da quanto è stato dimostrato nella prima delle mie Note citate in principio (§ 2) risulta che per ogni y e k fissi ($\gamma \leqq y \leqq \delta$), la $\Phi(x, y, k)$, come funzione di x, ammette anch'essa infinite derivate finite e continue, che si ottengono colla derivazione sotto il segno d'integrale; in modo che per ogni x finito, e per ogni y e k ($\gamma \leqq y \leqq \delta$) si può scrivere, applicando la formola abbreviata del Mac-Laurin:

$$\Phi(x, y, k) = \Phi(x, y, k)_{\binom{x}{0}} + x\Phi'_x(x, y, k)_{\binom{x}{0}}$$
$$+ \frac{x^2}{2!}\Phi''_x(x, y, k)_{\binom{x}{0}} + \dots + \frac{x^n}{n!}\Phi^{(n)}_x(x, y, k)_{\binom{x}{\theta_n x}},$$

dove il numero n può essere grande quanto si vuole.

Se poi la $\psi(x)$ è anche scelta in modo, che il resto

$$\frac{x^n}{n!}\Phi^{(n)}_x(x, y, k)_{\binom{x}{\theta_n x}}$$

per ogni x, y e k (x finito, $\gamma \leqq y \leqq \delta$) tenda sempre a zero al crescere di n, segue che per ogni k fissato è possibile lo sviluppo

$$\Phi(x, y, k) = \Phi(x, y, k)_{\binom{x}{0}} + x\Phi'_x(x, y, k)_{\binom{x}{0}} + \frac{x^2}{2!}\Phi''_x(x, y, k)_{\binom{x}{0}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x^n}{n!}\Phi^{(n)}_x(x, y, k)_{\binom{x}{0}} + \cdots$$

in tutti i punti del campo

$$-m \leqq x \leqq +m$$
$$\gamma \leqq y \leqq \delta,$$

m essendo un numero positivo, finito, preso ad arbitrio.

Ma evidentemente il resto

$$\frac{x^n}{n!}\Phi^{(n)}_x(x, y, k)_{\binom{x}{\theta_n x}} = \left[\frac{x^n}{n!}\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u, y)\frac{d^n}{dx^n}\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\right]_{\binom{x}{\theta_n x}},$$

che col cambiamento di $\frac{u-x}{k}$ in u diventa:

$$\frac{x^n}{n!}\Phi^{(n)}_x(x, y, k)_{\binom{x}{\theta_n x}} = \frac{(-1)^n x^n}{2n!\,\omega k^n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\theta_n x + ku, y)\frac{d^n}{du^n}\psi(u)\,du,$$

è minore in valore assoluto, qualunque siano x, y e k, soggetti alle dette condizioni, di

$$\frac{G''|x|^n}{2n!\,|\omega|\,k^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{d^n}{du^n}\psi(u)\right|du.$$

Se dunque la funzione $\psi(x)$ è scelta in modo, ferme rimanendo le altre ipotesi, che questa quantità, per ogni x finito, tenda a zero al crescere di n [ciò accade se ad esempio si pone $\psi(x) = e^{-x^2}$], si ottiene che il resto

$$\frac{x^n}{n!}\Phi^{(n)}_x(x, y, k)_{\binom{x}{\theta_n x}},$$

per ogni k dato, converge a zero uniformemente per tutti i valori di y compresi tra γ e δ, gli estremi inclusi, e per quelli di x, che appartengono ad un intervallo finito qualunque $(-m \ldots +m)$.

Assegnati k ed m, nel rettangolo

$$-m \leqq x \leqq +m$$
$$\gamma \leqq y \leqq \delta,$$

indicando con $S^{(p)}(x, y, k)$ la somma dei primi p termini dello sviluppo

precedente, se p è abbastanza grande, si potrà avere:

$$|\Phi(x, y, k) - S^{(p)}(x, y, k)| < \sigma,$$

ove σ è il solito numero positivo, piccolo a piacere.

La funzione $S^{(p)}(x, y, k)$ è un'espressione ordinata secondo le potenze intere e positive di x, aventi come massimo esponente il numero $p - 1$, i coefficienti delle quali sono funzioni finite e continue di y.

Basta perciò osservare che questi coefficienti sono della forma

$$\frac{(-1)^n}{2\, n!\, \omega k^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(ku, y) \frac{d^n}{du^n} \psi(u)\, du,$$

e che per essi vale quindi il ragionamento fatto nel § precedente per la $\Phi(x, y, k)$.

Nella $S^{(p)}(x, y, k)$ al posto di tali coefficienti si sostituiscano altrettanti polinomi razionali interi di y, i quali nell'intervallo $(\gamma \ldots \delta)$ ne differiscano in valore assoluto a meno della quantità σ sopra detta.

La $S^{(p)}(x, y, k)$ si trasformerà in un polinomio razionale intero di x ed y, $R^{(p)}(x, y, k)$, ed in tutto il rettangolo

$$-m \leqq x \leqq +m$$
$$\gamma \leqq y \leqq \delta$$

risulterà:

$$|S^{(p)}(x, y, k) - R^{(p)}(x, y, k)| < \sigma \frac{m^p - 1}{m - 1};$$

e quindi:

$$|\Phi(x, y, k) - R^{(p)}(x, y, k)| < \sigma\left(1 + \frac{m^p - 1}{m - 1}\right).$$

Se q indica il massimo grado dei polinomi sostituiti al posto dei coefficienti delle potenze di x nell'espressione $S^{p)}(x, y, k)$, il grado del polinomio $R^{(p)}(x, y, k)$ sarà al più uguale a $q(p - 1)$.

9. Si considerino due successioni di quantità positive:

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots,$$
$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \quad \ldots, \quad \sigma_n, \quad \ldots,$$

decrescenti, e tendenti allo zero.

Si costruisca poi una successione di polinomi razionali interi di x ed y:

$$R_1(x, y), \quad R_2(x, y), \quad \ldots, \quad R_n(x, y), \quad \ldots$$

in modo da avere:

$$|\Phi(x, y, k_n) - R_n(x, y)| < \sigma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

per ogni coppia di valori di x ed y, che soddisfano alle limitazioni

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$
$$\gamma \leqq y \leqq \delta.$$

Poichè, come si è detto, in ogni punto di questo rettangolo:

$$f(x, y) = \lim_{k=0} \Phi(x, y, k),$$

è chiaro, che ivi si ha:

$$f(x, y) = \Phi(x, y, k_1) + \sum_1^\infty {}_n [\Phi(x, y, k_{n+1}) - \Phi(x, y, k_n)],$$

e quindi anche:

$$f(x, y) = R_1(x, y) + \sum_1^\infty {}_n [R_{n+1}(x, y) - R_n(x, y)].$$

Abbiamo così ottenuto nel rettangolo dato la rappresentazione della funzione $f(x, y)$ per mezzo di una serie di polinomi razionali interi di x ed y.

Questa serie converge uniformemente, per ogni valore fissato di y $(\gamma \leqq y \leqq \delta)$, in tutto l'intervallo $(\alpha \ldots \beta)$ *).

Osservazione. — Il procedimento che abbiamo seguito per arrivare a questo risultato può essere adoperato sotto ipotesi meno restrittive di quelle, che per meglio precisare le cose, noi abbiamo voluto porre.

Così l'ipotesi che la $f(x, y)$ sia continua rispetto ad x, potrà sostituirsi coll'altra, che essa sia, per ogni valore fissato di y compreso tra γ e δ, gli estremi inclusi, integrabile rispetto ad x (sotto questa condizione si può egualmente ottenere per la $\Phi(x, y, k)$ lo sviluppo del § 8), e tale inoltre che in ogni punto del rettangolo:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$
$$\gamma \leqq y \leqq \delta$$

risulti:

$$\lim_{k=0} \Phi(x, y, k) = f(x, y).$$

*) Per il caso che la funzione data sia continua rispetto ad ognuna delle variabili, senza essere tale rispetto al loro insieme (cfr. Baire, l. c., cap. II), la questione è stata trattata anche dal sig. Lebesgue, l. c.

escluso) coincida con Λ; nel punto B abbia un valore assegnato comunque.

La funzione $f_\Lambda(x, y)$ così definita risulta nel punto $x_0 y_0$, come subito si vede, continua rispetto ad y.

Quanto all'altra variabile, supposto $y_0 < b - a$, si osservi, che nell'intervallo $(0 \ldots y_0)$ della retta $x = x_0$ deve esistere un punto, avente un'ordinata y'_0, maggiore di zero, nel quale il rapporto incrementale

$$\frac{\chi(x_0 + y) - \chi(x_0)}{y}$$

prende un valore che differisce in valore assoluto da L_{x_0} per meno di $\frac{\sigma}{2}$, essendo σ il solito numero positivo, piccolo a piacere.

Per la continuità della funzione

$$\frac{\chi(x + y'_0) - \chi(x)}{y'_0}$$

si può anche determinare una quantità positiva δ in modo, che riesca:

$$\left| \frac{\chi(x_0 + y'_0) - \chi(x_0)}{y'_0} - \frac{\chi(x_0 + \theta\delta + y'_0) - \chi(x_0)}{y'_0} \right| < \frac{\sigma}{2},$$

qualunque sia il valore di θ compreso tra -1 e $+1$ (nel caso speciale che si avesse $x_0 = a$ ovvero $y'_0 = b - x_0$, θ prenderebbe soltanto i valori compresi tra 0 e $+1$ ovvero soltanto i valori compresi tra -1 e 0).

Segue da ciò che $L_{x_0+\theta\delta}$, per ogni valore di θ entro i limiti detti, è maggiore di $L_{x_0} - \sigma$, e quindi nel punto $x_0 y_0$ la funzione $f_\Lambda(x, y)$ è *semicontinua inferiormente rispetto ad* x *).

Considerando dunque il rettangolo $AB'DC'$, ove B' è un punto qualunque, compreso tra A e B, e C' è un punto qualunque, compreso tra A e C, si ha che in questo rettangolo la $f_\Lambda(x, y)$ è per ogni x fissato continua rispetto ad y, e per ogni y fissato ($y = 0$ escluso) semicontinua rispetto ad x.

Nell'intervallo $(A \ldots B')$, in base al risultato che le funzioni semicontinue sono di classe 1 **), si può pertanto concludere che l'estremo

*) Cfr. Baire, l. c., § 7.

**) Cfr. Baire, l. c., § 56.

oscillatorio Λ non è di classe superiore alla classe 2; e, poichè il punto B' può essere preso prossimo al punto B quanto si vuole, ciò è vero anche per tutto il campo in cui è definito Λ, cioè per tutto l'intervallo $(A \ldots B)$, il punto B escluso.

Bologna, dicembre 1899.

CARLO SEVERINI.

SUL MOVIMENTO DI UN PUNTO NON SOGGETTO AD ALCUNA FORZA SOPRA UN TORO.

Memoria del Dr. **Mattia Puglisi**, in Cefalù.

Adunanza dell'11 marzo 1900.

Leggendo la Memoria del chiarissimo prof. Otto Staude « *Ueber die Bewegung eine schweren Punktes auf einer Rotationsfläche* » *) ho cercato studiare in particolare il moto di un punto non soggetto ad alcuna forza sopra un toro, seguendo in parte la via tracciata dallo Staude pel caso del punto pesante sulle superficie di rivoluzione. Richiamo i ragionamenti fatti in un'altra mia Nota e do le dimostrazioni di qualche teorema, non date dallo Staude, quali quelle dei teoremi II e III.

1. Sia

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),$$

l'equazione di un toro riferita ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con l'asse delle z verticale, coincidente con l'asse di rotazione del toro e rivolto verso il basso. Si supponga $a > b$.

Dalla (1) si ricava:

$$(1') \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = a \pm \sqrt{b^2 - z^2},$$

la quale, per ogni valore di z compreso nell'intervallo

$$(2) \qquad -b < z < b,$$

assume due valori distinti, reali e positivi, i quali coincidono ai limiti, $z = -b$, $z = b$, dell'intervallo.

Indicando con φ l'angolo che il piano meridiano, di un punto qua-

*) Acta Mathematica, Bd. XI.

lunque della superficie del toro, forma con il piano xz, otteniamo facilmente le formole

(3) $x = (a \pm \sqrt{b^2 - z^2}) \cos\varphi, \quad y = (a \pm \sqrt{b^2 - z^2}) \operatorname{sen}\varphi, \quad z = z,$

le quali determinano la posizione di due punti della superficie del toro.

Ogni piano orizzontale, compreso fra i piani $z = -b$, $z = b$, sega il toro in due circoli paralleli distinti, i quali, per le ipotesi fatte, non possono avere nessun punto in comune con l'asse delle z. Però ai limiti $z = -b$, $z = b$, i due paralleli coincidono, hanno raggio a ed il toro è tangente ai piani $z = -b$, $z = b$.

Se per brevità poniamo:

$$f(z) = a \pm \sqrt{b^2 - z^2},$$

le equazioni differenziali di primo ordine del movimento di un punto non soggetto ad alcuna forza sopra un toro, come si sa, sono:

(4) $$d\varphi = \frac{k\sqrt{1 + f'^2(z)}}{f(z)\sqrt{2hf^2(z) - k^2}}dz, \qquad dt = \frac{f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)}}{\sqrt{2hf^2(z) - k^2}}dz,$$

dove h è la costante dell'integrale delle forze vive e k la costante dell'integrale delle aree; k la supponiamo diversa da zero.

Ponendo:

$$z = -b\cos u,$$

avremo:

$$\sqrt{b^2 - z^2} = b\operatorname{sen} u, \qquad dz = b\operatorname{sen} u\, du.$$

La dipendenza fra le variabili z ed u è tale che, mentre u percorre tutti i possibili valori reali, z oscilla sempre fra $-b$ e $+b$. Dunque, per le ipotesi fatte, la funzione

$$f(z) = a + b\operatorname{sen} u$$

è funzione ad un valore e continua di u, sempre positiva e differente da 0 e ∞.

Inoltre sarà:

$$1 + f'^2(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}, \qquad \sqrt{1 + f'^2(z)}\,dz = b\,du.$$

Dopo ciò, ponendo $v = \operatorname{sen}^2\varphi$ e sostituendo $\pi - u$ in luogo di u, le equazioni differenziali del movimento del punto considerato sopra il toro diventano:

(5) $x = (a + b\operatorname{sen} u)\sqrt{1 - v}, \quad y = (a + b\operatorname{sen} u)\sqrt{v}, \quad z = b\cos u,$

$$(6) \quad \begin{cases} -\displaystyle\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{u_0}^u \frac{kb}{(a+b\,\mathrm{sen}\,u)\sqrt{R(u)}}\,du = 0, \\ \displaystyle\int_{u_0}^u \frac{b(a+b\,\mathrm{sen}\,u)}{\sqrt{R(u)}}\,du = t, \end{cases}$$

dove

$$R(u) = 2\,b(a + b\,\mathrm{sen}\,u)^3 - k^2.$$

I valori $u = u_0$, $v = 0$, $\sqrt{1-v} = 1$, corrispondono a $t = 0$.

2. Ponendo per brevità

$$g_1(u) = \frac{kb}{a + b\,\mathrm{sen}\,u}, \qquad g_2(u) = b(a + b\,\mathrm{sen}\,u),$$

si vede che queste funzioni sono monodrome, continue e differenti da 0 e ∞; allora ripetendo i ragionamenti fatti nell'altra Nota « *Sul movimento di un punto pesante sopra una superficie di rivoluzione* » *), si vedrebbe che il movimento del punto considerato è limitato sulla zona compresa fra due certi paralleli detti cerchi di *regresso*, che la u, e quindi anche la $z = b\cos u$, è una funzione periodica di t col periodo $2\,m_2 w_2$, e che le x, y; le quali in generale non sono funzioni periodiche del tempo t, diventano tali col periodo

$$T = 2\,m_2 w_1,$$

allorquando ha luogo la relazione

$$2\,m_2 w_1 - 4\,m_1 \frac{\pi}{2} = 0,$$

dove m_1, m_2 sono numeri interi qualunque e

$$w_1 = \int_{u_0}^{u_1} \frac{kb}{(a + b\,\mathrm{sen}\,u)\sqrt{R(u)}}\,du, \qquad w_2 = \int_{u_0}^{u_1} \frac{b(a + b\,\mathrm{sen}\,u)}{\sqrt{R(u)}}\,du.$$

Allora possiamo enunciare il

TEOREMA. — *La traiettoria del punto considerato tocca alternativamente e periodicamente i paralleli che limitano la zona sulla quale avviene il movimento.*

3. Immaginiamo date le costanti b e $\frac{1}{2}\,k$, delle forze vive e delle

*) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XII.

aree. Allora per il movimento definito dalle equazioni (4), le quali dopo le posizioni fatte diventano:

$$d\varphi = \frac{kb}{(a+b\,\mathrm{sen}\,u)\sqrt{R(u)}}\,du, \qquad dt = \frac{b(a+b\,\mathrm{sen}\,u)}{\sqrt{R(u)}}\,du,$$

la scelta delle coordinate iniziali $z_0 = b\cos u_0$, φ_0 del punto in movimento rimane arbitraria.

Per la simmetria delle superficie di rivoluzione può supporsi $\varphi_0 = 0$, mentre per $z_0 = b\cos u_0$ possiamo supporre un valore di u che annulli la $R(u)$, o anche un altro valore che corrisponda ad un parallelo segato dalla traiettoria del punto in movimento.

Dalle precedenti si ricava:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{R(u)}}{b(a+b\,\mathrm{sen}\,u)}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{(a+b\,\mathrm{sen}\,u)^2},$$

e per $u = u_0$, $\varphi = \varphi_0$:

$$u'_0 = \frac{\sqrt{R(u_0)}}{b(a+b\,\mathrm{sen}\,u_0)}, \qquad \varphi'_0 = \frac{k}{(a+b\,\mathrm{sen}\,u_0)^2}.$$

Ora u'_0, φ'_0, dipendono dalla posizione iniziale e dalle costanti b, k, quindi $u = u_0$ deve soddisfare la relazione

$$R(u) \geqq 0.$$

Questa condizione, ricordando che per u_0 abbiamo supposto un valore di u che annulli la $R(u)$ o che corrisponda ad un parallelo *segato* dalla traiettoria del punto in movimento, determina nei limiti $-b < z < b$ i paralleli della superficie del toro raggiungibili dal punto in movimento per dati valori di b e k, mentre rimangono non raggiungibili quelli che non soddisfano la detta condizione, cioè quelli che rendono la

$$R(u) < 0.$$

Adesso insieme al toro

$$\sqrt{x^2+y^2} = a + b\,\mathrm{sen}\,u$$

consideriamo il cilindro

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2b},$$

riferito al medesimo sistema di assi a cui si è riferito il toro, ed avente l'asse di rotazione anche coincidente con l'asse delle z.

Eliminando, fra le precedenti equazioni, x^2+y^2 si ottiene:

$$R(u) = 2b(a+b\,\mathrm{sen}\,u)^2 - k^2 = 0.$$

Ne viene che l'equazione $R(u) = 0$ può considerarsi come il risultato dell'eliminazione di $x^2 + y^2$ dalle due equazioni

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2h}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = a + b \operatorname{sen} u,$$

dove esiste la ipotesi $k > 0$.

Ora la $R(u)$ può scriversi:

$$R(u) = 2b\left(a + b \operatorname{sen} u + \frac{k}{\sqrt{2h}}\right)\left(a + b \operatorname{sen} u \frac{k}{\sqrt{2h}}\right) = 0,$$

la quale, essendo il fattore $2h\ (a + b \operatorname{sen} u)$, per le ipotesi fatte, sempre maggiore di zero, sarà soddisfatta per valori che annullano il fattore $\left(a + b \operatorname{sen} u - \frac{k}{\sqrt{2h}}\right)$. E tutti i valori che rendono

$$a + b \operatorname{sen} u - \frac{k}{\sqrt{2h}} = 0$$

sono dati dalle formole

$$u_0 + 2n\pi, \quad (2n + 1)\pi - u_0,$$

n essendo un numero intero qualunque o nullo.

A tutti i valori di u dati dalla formola $u_0 + 2n\pi$ corrisponde il parallelo $z_0 = b \cos u_0$, ed a tutti quelli dati dall'altra formola $(2n + 1)\pi - u_0$ corrisponde il parallelo $z_1 = b \cos u_1$, dove si è posto $\pi - u_0 = u_1$. Quindi i valori u_0 ed u_1 che annullano la $R(u)$ dànno le z dei paralleli d'intersezione delle due superficie accennate; possiamo perciò enunciare il

« Teorema — I paralleli di regresso del movimento del punto sopra « il toro sono i paralleli d'intersezione di esso con la superficie del cilindro « $x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2h}$ ».

Per tutti i punti del toro esterni alla superficie del cilindro si ha

$$x^2 + y^2 > \frac{k^2}{2h},$$

ovvero:

$$2h(a + b \operatorname{sen} u)^2 - k^2 > 0;$$

e per tutti i punti dentro il cilindro si ha:

$$2h(a + b \operatorname{sen} u)^2 - k^2 < 0.$$

Da qui segue il

« TEOREMA. — Per un parallelo della superficie del toro si ha:

$$R(u) \gtreqless 0$$

« secondo che esso è esterno, sopra o dentro la superficie del cilindro « $(h k)$ ».

La superficie del cilindro $(h k)$, la quale dipende solamente dalle costanti delle forze vive h e delle aree $\frac{1}{2} k$, separa adunque i punti raggiungibili dal punto in movimento da quelli non raggiungibili, e determina d'altra parte i possibili cerchi di regresso del movimento mediante le intersezioni con la superficie del toro.

Tenendo fisso h e facendo variare k, il cilindro $(h k)$ aumenta o diminuisce di raggio coll'aumentare o diminuire di k; invece tenendo fisso k e facendo variare h, il cilindro aumenta o diminuisce di raggio col diminuire o aumentare di h.

Se $\frac{k}{\sqrt{2 h}} < (a - b)$, si ha $R(u) > 0$ per qualunque valore di u e quindi tutti i punti del toro sono raggiungibili dal movimento; ma se $\frac{k}{\sqrt{2 h}} > (a + b)$, si ha $R(u) < 0$ e nessun punto del toro è raggiungibile dal movimento.

Se $\frac{k}{\sqrt{2 h}} = (a - b)$, la funzione $R(u)$ si annulla solamente per valori di u dati dalla formola $\frac{3\pi}{2} + 2 n \pi$, essendo al solito n un numero intero qualunque o nullo, mentre per qualunque altro valore di u si mantiene sempre maggiore di zero e quindi anche in questo caso tutti i punti sono raggiungibili dal movimento.

Se $\frac{k}{\sqrt{2 h}} = (a + b)$, la funzione $R(u)$ si annulla solamente per valori di u dati dalla formola $\frac{\pi}{2} + 2 n \pi$, mentre si mantiene minore di zero per qualsiasi altro valore di u; allora solamente i punti del parallelo corrispondente ai valori di $u = \frac{\pi}{2} + 2 n \pi$ sono raggiungibili dal movimento.

Per $k = 0$ il cilindro si riduce all'asse z.

4. Dalle formole

$$x = (a + b \operatorname{sen} u)\sqrt{1 - v}, \quad y = (a + b \operatorname{sen} u)\sqrt{v}, \quad z = b \cos u,$$

si vede che ai valori $u = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ corrispondono rispettivamente i paralleli più basso, più esterno, più alto, più interno.

Di modo che i valori di u del primo e secondo quadrante comprendono la parte della superficie del toro a curvatura positiva, e quelli del terzo e quarto quadrante la parte della superficie del toro a curvatura negativa.

Abbiamo visto che u_0 ed u_1 sono una coppia di valori di u che annullano la $R(u)$, perciò questa può mettersi sotto la forma

$$R(u) = (u - u_0)(u_1 - u)\, r(u),$$

dove $r(u)$ è una funzione di u che nell'intervallo suddetto è positiva e diversa da zero.

Legando il risultato ottenuto nel paragrafo precedente, cioè che per un parallelo della superficie del toro si ha $R(u) \gtreqless 0$, secondo che esso giace fuori, sopra o dentro il cilindro, e che solamente i punti che sodisfano la condizione $R(u) \geqq 0$ sono raggiungibili dal punto in movimento, a questa ultima forma della $R(u)$, cerchiamo di vedere se esso risultato sussiste insieme alle sue conseguenze.

« I. — Se il toro penetra con una zona nello spazio dentro il ci-
« lindro (hk), e questa zona è limitata da due paralleli dei quali
« $z_0 = b \cos u_0$ è l'inferiore, e $z_1 = b \cos u_1$ il superiore, allora il mo-
« vimento del punto avrà luogo nella zona rimanente, sarà condizionata-
« mente periodico e corrispondente alle equazioni diffenziali (6) con i
« cerchi di regresso $z_0 = b \cos u_0$, $z_1 = b \cos u_1$ ».

Ai paralleli intersezioni delle due superficie corrispondono coppie di valori di u che annullano la $R(u)$, dati dalle formole $u = u_0 + 2k\pi$, $u = (2k+1)\pi - u_0$; e per i valori di u compresi fra i valori di ogni coppia, corrispondente ad un dato valore di k, la $R(u)$ è positiva e diversa da zero.

Ora essendo $R(u) = 2h(a + b \operatorname{sen} u)^2 - k^2$, essa può assumere valori positivi solamente per $h > 0$.

II. — Vediamo che cosa avviene se sotto le medesime ipotesi che hanno dato luogo al teorema I è anche $u_0 = u_1$.

Occorre anzitutto cercare il limite a cui tende l'integrale

$$w_\alpha = \int_{u_0}^{u_1} \frac{g_\alpha(u)}{\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)\,r(u)}}\,du\,, \qquad (\alpha = 1,\ 2)$$

quando u_0 ed u_1 tendono a coincidere.

Per un noto teorema di calcolo integrale si ha:

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{g_2(u)}{\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)\,r(u)}}\,du = \frac{g_2(u')}{\sqrt{r(u')}} \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)}}\,,$$

dove u' è un certo valore intermedio fra u_0 ed u_1.

Ponendo $\sqrt{\dfrac{u_1-u}{u-u_0}} = x$, ed applicando le regole di calcolo integrale si ottiene:

$$\int \frac{du}{\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)}} = -\,2 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{u_1-u}{u-u_0}}\,;$$

dalla quale segue

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)}} = \pi.$$

E perciò al limite per $u' = u_0 = u_1$ si ha:

$$w_1 = \pi \frac{g_1(u_0)}{\sqrt{r(u_0)}}, \qquad w_1 = \pi \frac{g_2(u_0)}{\sqrt{r(u_0)}}\,.$$

La condizione

$$-\,4\,m_1 \frac{\pi}{2} + 2\,m_2 w_1 = 0\,,$$

ed il periodo

$$T = 2\,m_2 w_2\,,$$

divengono allora rispettivamente:

$$-\,4\,m_1 \frac{\pi}{2} + 2\,m_2 \pi \frac{g_1(u_0)}{\sqrt{r(u_0)}} = 0, \quad T = 2\,m_2 \pi \frac{g_2(u_0)}{\sqrt{r(u_0)}}.$$

Ricavando dalla prima delle precedenti il valore di m_2, si ottiene:

$$T = \frac{2\,m_1 \pi}{k}(a + b \operatorname{sen} u_0)^2.$$

E siccome $u_0 = u_1 = \dfrac{\pi}{2}$, ed m_1 è un numero intero qualunque, si ha finalmente:

$$T = \frac{2\pi}{k}(a + b)^2.$$

Allora possiamo dire:

« Se i cerchi di regresso della zona, nella quale avviene il movi-
« mento condizionatamente periodico, coincidono, il movimento avrà luogo
« sul parallelo di coincidenza ».

In questo caso avendosi $k = \pm (a + b)\sqrt{2b}$, il periodo T prende anche la forma:

$$T = \pm \frac{2\pi(a+b)}{\sqrt{2b}}.$$

Questo caso limite del movimento condizionatamente periodico presuppone un contatto fra il toro ed il cilindro (bk) lungo il parallelo più esterno, corrispondente al valore $u = \frac{\pi}{2}$. Questo movimento periodico è *stabile*, perchè la sua traiettoria è limitata dall'una e dall'altra parte da regioni della superficie del toro non raggiungibili.

III. — Se il cilindro è tangente al toro lungo il parallelo più interno, corrispondente al valore di $u = \frac{3\pi}{2}$, i limiti u_0 ed u_1 diventano rispettivamente $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; ed avendosi allora $\frac{k^2}{2b} = (a-b)^2$, la funzione $R(u) = 2b(a + b \operatorname{sen} u)^2 - k^2$ diventa:

$$R(u) = 2bb(1 + \operatorname{sen} u)[2a - b(1 - \operatorname{sen} u)];$$

quindi

$$w_a = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{g_a(u)}{\sqrt{2bb(1+\operatorname{sen} u)[2a - b(1-\operatorname{sen} u)]}}\, du.$$

Ora, come nel caso precedente, indicando con u' un certo valore intermedio fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, si ha:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{g_a(u)}{\sqrt{R(u)}}\, du = \frac{g_a(u')}{\sqrt{2bb[2a - b(1-\operatorname{sen} u)]}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1+\operatorname{sen} u}}.$$

Ponendo $u = -\frac{\pi}{2} + 2v$, si ha:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1+\operatorname{sen} u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \frac{dv}{\operatorname{sen} v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log \operatorname{tang} \frac{v}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \infty,$$

e perciò

$$w_a = \frac{g_a(u)}{2\sqrt{bb}[2a - b(1 - \operatorname{sen} u)]} \left[\log \operatorname{tang} \frac{v}{2}\right]_0^\pi$$

diviene logaritcamente infinito.

Allora le funzioni x, y, z per tutti i valori di t rimangono monodrome, finite e continue, ma perdono la primitiva proprietà della periodicità, perchè al crescere illimitatamente di t, la u tende verso u_1. Quindi anche la funzione z tende verso z_1 senza mai raggiungere questo valore, mentre se esistesse la periodicità, essa dovrebbe riprendere gli stessi valori. Il punto in moto si avvicina in modo continuo al parallelo più interno; e poichè le funzioni x, y hanno perduto anche esse la periodicità conservandosi finite e continue, esso punto non riprenderà mai la stessa posizione e conserverà sempre la medesima direzione. Esso non potrà percorrere un parallelo poichè la z si manterrebbe costante, non percorrerà un meridiano poichè raggiungerebbe il parallelo più interno; dunque percorrerà una linea che non conduca direttamente al parallelo più interno, ma che ad esso si avvicini in modo continuo. Questa linea avvolgerà il toro sempre più in nuove spire, avvicinandosi asintoticamente d'ambo le parti al parallelo più interno, che diremo parallelo *critico*. Si ha quindi il teorema:

« Se i due cerchi di regresso coincidono sul parallelo critico, nasce « un movimento asintotico ».

Ma se al principio del movimento si porta il punto su questo parallelo critico, esso non l'abbandonerà mai, e lo percorrerà continuamente con velocità costante. Questo movimento periodico è *labile*, perchè la sua traiettoria, ossia il parallelo critico, è limitato dall'una e dall'altra parte parte da regioni della superficie del toro raggiungibili dal punto in movimento. Il suo periodo, come nel teorema II, è:

$$T = \frac{2\pi}{k}(a - b)^2.$$

IV.—Esaminiamo adesso il caso in cui il toro trovasi internamente al cilindro senza essere tangente.

Come abbiamo visto, in questo caso si ha: $\frac{k}{\sqrt{2b}} < a - b$, la funzione $R(u) > 0$ per qualunque valore di u, e tutti i punti del toro sono raggiungibili dal movimento.

Per lo esame di questo caso mettiamo le (5) e le (6) sotto una

nuova forma mediante le posizioni:

$$\cos u = -\frac{y_1}{b}, \quad \operatorname{sen} u = \frac{\sqrt{b^2 - y_1^2}}{b}, \quad du = \frac{dy_1}{\sqrt{b^2 - y_1^2}}.$$

Si ha facilmente:

$$\begin{cases} -\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{-b}^{y_1} \frac{kb}{(a+\sqrt{b^2-y_1^2})\sqrt{R_1(y_1)}} dy_1 = 0, \\ \int_{-b}^{y_1} \frac{b(a+\sqrt{b^2-y_1^2})}{\sqrt{R_1(y_1)}} dy_1 = t, \end{cases}$$

$$x = (a+\sqrt{b^2-y_1^2})\sqrt{1-v}, \quad y = (a+\sqrt{b^2-y_1^2})\sqrt{v}, \quad z = -y_1,$$

dove

$$R_1(y_1) = [2b(a+\sqrt{b^2-y_1^2})^2 - k^2](y_1-b)(y_1+b).$$

Le funzioni

$$g_1 = \frac{kb}{a+\sqrt{b^2-y_1^2}}, \quad g_2 = b(a+\sqrt{b^2-y_1^2}),$$

$$R(y_1) = 2b(a+\sqrt{b^2-y_1^2})^2 - k^2,$$

sono monodrome, finite e continue per tutti i valori di y_1 compresi nell'intervallo $-b \leqq y_1 \leqq b$, hanno sempre lo stesso segno e giammai diventano 0 o ∞. Allora siamo nelle condizioni accennate al n° 2 con y_1 invece di u. Perciò la y_1 e quindi anche la z è una funzione periodica di t col periodo $T = 2w_2$; le x, y funzioni condizionatamente periodiche, le quali, sotto la condizione

$$-4m_1\frac{\pi}{2} + 2m_2 w_1 = 0,$$

hanno il periodo

$$T = 2m_2 w_2.$$

Il corrispondente movimento si distingue da quello considerato nei casi precedenti per la mancanza dei cerchi di regresso; il punto o descrive un meridiano oppure la sua traiettoria avvolgerà il toro come i vermi di una vite ripassando per le medesime posizioni.

Se il punto principia il movimento da una posizione qualunque dei paralleli più interno e più esterno nella direzione orizzontale, esso rimane sempre sul parallelo da cui è partito.

Riepilogando: se il toro trovasi fuori del cilindro senza toccarlo, avrà luogo il movimento condizionatamente periodico senza circoli di

ɜresso; allorquando il cilindro tocca il toro lungo il parallelo più inter-ı, il movimento assume la forma asintotica ed il punto si avvicina con-ıuamente al parallelo critico senza mai raggiungerlo. Coll'ulteriore cre-ɜre di k il cilindro sega il toro lungo due paralleli, separando una zona li cui punti non sono raggiungibili, mentre sull'altra zona, esterna al indro, il movimento è condizionatamente periodico con due cerchi di gresso. Infine quando il cilindro tocca il toro lungo il parallelo più :erno, si ha un movimento stabile sul parallelo medesimo.

Cefalù, gennajo 1900.

MATTIA PUGLISI.

TEORIA DEI SISTEMI ARTICOLATI PIÙ SEMPLICI.

Memoria del Dr. **Pietro Burgatti**, in Roma.

Adunanza dell'8 aprile 1900.

I problemi fondamentali che si possono porre riguardo ai sistemi articolati (e qui si parlerà soltanto di sistemi piani) sono di due specie:

a) Dato un sistema articolato e due punti P e Q che fanno parte di esso, e supposto che in ogni sua deformazione ad una posizione di P corrisponda una sola posizione per Q, determinare la trasformazione puntuale che il sistema articolato realizza.

b) Definita una trasformazione puntuale mediante le sue formule analitiche o le sue proprietà geometriche caratteristiche, costruire, quando è possibile, un sistema articolato atto a realizzarla, nel senso indicato precedentemente.

Il primo problema non presenta difficoltà gravi di concetto, giacchè l'analisi permette in generale di rappresentare mediante equazioni i vincoli imposti al moto di P e Q dal sistema articolato; ma sovente le equazioni sono così complicate, che la loro completa discussione riesce molto difficile.

Il secondo problema, che è più interessante dal punto di vista pratico, fu trattato da molti autori, dopo che Peaucellier ebbe scoperto l'inversore che porta il suo nome, e sono ormai abbastanza numerosi i sistemi articolati che si conoscono e che realizzano le più note trasformazioni. Ma i singoli autori vi pervennero coll'uso di procedimenti propri e speciali: parte dichiarati pubblicamente dagli autori stessi, parte no. Quindi è che lo studioso trova in questo importante capitolo della Meccanica qualche cosa di oscuro e di incompleto, e sente nascere vivamente il desiderio di giungere, per così dire, esso stesso alla costruzione dei

detti sistemi, mediante l'applicazione diretta e ragionata di un certo complesso di proposizioni fondamentali. Questo desiderio, che è del resto un còmpito della scienza, indusse ad alcuni notevoli tentativi, i quali posero anche in luce le gravi difficoltà che presenta l'enunciato problema, massime quando sia mantenuto sotto la sua forma più generale; dalla qual cosa si resti persuasi, che per raggiungere l'intento è necessario proseguire passo a passo.

È per ciò che io credo di qualche utilità questa breve Memoria, nella quale soltanto i sistemi articolati più noti e più semplici sono dedotti da pochi principî generali con metodo facile, intuitivo e, direi quasi, grafico.

Lo stesso metodo mi ha condotto alla generalizzazione di alcune forme dei sistemi in discorso: sono quelli rappresentati dalle Fig. 3, 7, 11.

Sia data una trasformazione puntuale, che abbia la proprietà di trasformare i circoli in circoli. Noi parleremo soltanto di queste. Due circoli o due punti, che si ottengono l'uno dall'altro applicando la data trasformazione, si diranno brevemente circoli o punti corrispondenti.

Un circolo, che abbia il centro in un certo punto A, sarà indicato col simbolo (A); viceversa, indicando un circolo con (A), s'intende che il centro è denotato con A.

Quando si parlerà di segmenti articolati, questi si dovranno pensare come aste rigide, unite per le loro estremità a cerniera *) con l'asse normale al piano del foglio.

Sia (C) un circolo qualunque e (C') il suo corrispondente; sia inoltre P un punto di (C), e P' il punto corrispondente sopra (C'). È facile dimostrare la proposizione che ora enunciamo, la quale in seguito sarà chiamata prima proposizione fondamentale:

« Un sistema articolato, del quale facciano parte i tre segmenti PC, « CC', $C'P'$, articolati in C e C', manterrà sempre in corrispondenza nella « data trasformazione i punti P e P', comunque esso venga deformato, « quando possieda le due proprietà seguenti:

« 1° Di potersi deformare in guisa che CC' rimanga immobile, e che « i punti P e P', descrivendo i rispettivi circoli (C) e (C'), restino costan- « temente punti corrispondenti;

*) Ho creduto bene di non adottare quì completamente il linguaggio della Meccanica applicata.

« 2° Di potersi deformare mantenendo costanti gli angoli PCC', e « $P'C'C$, e per queste deformazioni i circoli (C) e (C'), supposti rigidamente « mente collegati a CC', restino sempre circoli corrispondenti ».

Infatti, deformiamo in un modo qualunque il nostro sistema articolato, in guisa che P vada in una certa posizione P_1. Questo passaggio di P in P_1 si può ottenere colla successione di due deformazioni ben definite: una di quelle indicate nella seconda proprietà, in modo che il circolo (C) vada a passare per P_1; poi una di quelle indicate nella prima proprietà, in guisa che P vada a coincidere con P_1. In virtù della prima deformazione il circolo (C') andrà ad essere ancora il corrispondente di (C), pur restando P e P' corrispondenti; per la seconda, percorrendo P il cerchio (C), il punto P' percorrerà (C') rimanendo sempre il corrispondente di P, talchè quando P si arresta in P_1, P' si arresterà nel punto corrispondente a P_1. La proposizione è dimostrata.

Un'altra proposizione, che diremo in seguito seconda proposizione fondamentale, e che ha molta analogia colla precedente, risulta dal considerare un punto come intersezione di due circoli. Siano (C) e (C_1) due circoli qualunque, (C') e (C'_1) i corrispondenti in una data trasformazione; se i primi due s'intersecano in P, gli altri due s'intersecheranno in un punto P' corrispondente di P. Allora la seconda proposizione si può enunciare così:

« Un sistema articolato, del quale facciano parte i due segmenti CC', « $C_1C'_1$, manterrà sempre corrispondenti nella data trasformazione i punti « P e P', comunque esso venga deformato, quando possieda le due pro« prietà seguenti:

« 1° Di potersi deformare in guisa che CC' rimanga immobile, e che « i circoli (C_1) e (C'_1) restino costantemente corrispondenti, quando essi « siano supposti rigidamente collegati con $C_1C'_1$;

« 2° Di potersi nello stesso modo deformare, mantenendo fisso $C_1C'_1$ « e supponendo i circoli (C) e (C') collegati rigidamente con CC' ».

Questa proposizione è quasi evidente; essa, del resto, può essere dimostrata come la precedente.

Noi applicheremo queste due proposizioni alla costruzione dei sistemi articolati che realizzano una traslazione, una rotazione, una similitudine, una inversione, ed anche una trasformazione prodotto di due di esse.

Traslatore.—Un traslatore è un sistema articolato, il quale permette

di descrivere in un piano una figura uguale ad una data, ma trasportata in un'altra posizione, in guisa che i segmenti che congiungono i punti corrispondenti sono paralleli ed uguali. In questo caso la trasformazione che si opera è una traslazione.

Sia AB (Fig. 1) il segmento che rappresenta in grandezza e direzione la traslazione, (C) e (C') due circoli corrispondenti. Supposto il parallelogramma $ACC'B$ articolato nei suoi vertici, e i due circoli invariabilmente collegati col segmento CC', si vede che, tenuto fisso AB, in ogni deformazione i circoli restano corrispondenti. Questo parallelogramma farà parte del sistema articolato che si cerca.

Siano ora P e P' due punti corrispondenti sui circoli. È chiaro che il parallelogramma $CPP'C'$, supposto articolato, manterrà in ogni sua deformazione i punti P e P' in corrispondenza, quando si tenga fisso il lato CC'. Allora il sistema formato coi due parallelogrammi ora considerati soddisfa alle due condizioni volute dalla prima proposizione; quindi, tenuto fisso il lato AB, il punto P' sarà il corrispondente di P in ogni deformazione del sistema. Si è ottenuto così il *traslatore di Kempe.*

Rotatori.—Un rotatore è un sistema articolato, il quale permette di descrivere una figura uguale ad un'altra, ma girata nel piano di un certo angolo intorno ad un dato punto. La trasformazione che si deve considerare è una rotazione.

Sia O il centro della rotazione, COC' la sua ampiezza, (C) e (C') due circoli corrispondenti (Fig. 2). Supponendo questi circoli invariabilmente collegati col triangolo rigido COC', girevole intorno ad O, si vede che essi rimangono sempre circoli corrispondenti quando il triangolo gira intorno ad O. Questo triangolo farà parte del sistema articolato che si cerca.

Siano ora P e P' due punti corrispondenti di (C) e (C'). Bisogna collegare con COC' un sistema articolato, il quale, in ogni deformazione che mantiene immobile CC', faccia costantemente corrispondere sui due circoli P e P'. A tal fine tiriamo il raggio CP'' parallelo a $C'P'$, ed osserviamo che l'angolo PCP'' è uguale a COC', qualunque sia sui due circoli la posizione dei punti corrispondenti P e P', e che inoltre i lati del parallelogramma $CP''P'C'$ sono di lunghezza costante. Allora segue immediatamente, che se si deforma il sistema composto del paral-

lelogramma articolato $CP'PC'$ e del triangolo CPP'', mantenendo immobile il lato CC', i punti P e P' restano sempre punti corrispondenti nella data trasformazione. Possiamo dunque concludere, che il sistema articolato composto dei triangoli rigidi COC', PCP'' e del parallelogramma $CP''P'C'$ soddisfa le due condizioni volute, ed è per conseguenza un rotatore.

Questo sistema articolato può essere modificato. Tirando il segmento OD, parallelo ed uguale a $C'P'$ e CP'', e articolando le tre aste OD, DP', DP'' in O, D, P', P'', si vede che il triangolo $DP'P'$ è uguale a COC' e quindi invariabile, e che questi nuovi legami non mutano il grado di libertà del sistema. Onde si può sostituire il parallelogramma $CP''DO$ al parallelogramma primitivo, il triangolo $P''P'D$ al triangolo COC': si ottiene così il *rotatore di Sylvester*.

Si giunge ad una nuova forma di rotatore applicando la seconda proposizione fondamentale.

Sia α l'ampiezza della rotazione ed O il centro (Fig. 3). Segnato un punto P, siano (C) e (C_1) due circoli che passano per P; se li facciamo rotare di un angolo α intorno ad O, essi andranno rispettivamente nelle posizioni (C'), (C_1'), e il punto d'intersezione P' sarà il corrispondente di P.

Ciò posto, congiungiamo C_1 e C_1' con O, e immaginiamo il triangolo C_1OC_1' girevole intorno ad O, e con esso rigidamente collegati i due circoli (C_1) e (C_1'). Allora, se si fa ruotare detto triangolo intorno ad O, mantenendo immobili i circoli (C) e (C') corrispondenti, anche gli altri due circoli (C_1) e (C_1') saranno costantemente corrispondenti; quindi il punto d'intersezione di (C') e (C_1') sarà sempre il corrispondente del punto intersezione di (C) e (C_1). Un ragionamento identico si ripete, tenendo immobili i due circoli (C_1) e (C_1'), e facendo ruotare intorno ad O i circoli (C) e (C') rigidamente collegati col triangolo COC'. Dunque, in virtù del principio stabilito, possiamo concludere, che il sistema che si ottiene articolando CP, C_1P, $C'P'$, $C_1'P'$ rispettivamente in C, P, C_1, C', P', C_1', e i triangoli COC', C_1OC_1' in O, è un rotatore.

Questo rotatore assume una forma molto particolare, se si suppone la rotazione di 180°. Tal forma è rappresentata dalla Fig. 3 bis. Quando P descrive una retta in un certo senso, P' descrive una retta parallela, ma in senso opposto, rispetto ad un osservatore in O e che guarda in una direzione parallela alle due rette.

Pantografi. — Un pantografo è un sistema articolato, il quale permette di descrivere una figura piana simile ad un'altra. I pantografi si possono dividere in due specie: pantografi-semplici e pantografi-rotatori. Nei primi, i punti che descrivono le figure simili sono costantemente in linea retta col centro di similitudine; nei secondi, le rette che uniscono tali punti con questo centro formano un angolo costante.

Proponiamoci di costruire un pantografo-semplice, applicando la prima proposizione fondamentale. Sia O il centro di similitudine, (C) e (C') due circoli corrispondenti (Fig. 4). Se si fa ruotare il segmento OC' intorno ad O, e si suppongono i circoli (C) e (C') collegati rigidamente con esso, questi circoli saranno costantemente corrispondenti nella data trasformazione. Siano ora P e P' due punti corrispondenti sui circoli. Quando P descrive il circolo (C), P' descrive il circolo (C'), in guisa che il raggio $C'P'$ resta costantemente parallelo al raggio CP; per conseguenza, tirato il segmento PP'' parallelo a CC', si vede che esso si mantiene di lunghezza costante (uguale a CC'), come pure costante si mantiene il segmento $C'P''$. Possiamo allora concludere, che il sistema formato coi quattro segmenti OC', CP, PP'', $C'P'$ articolati in C, P, C', P'', soddisfa le condizioni volute dalla prima proposizione fondamentale, ed è perciò il pantografo-semplice che si cercava; il quale porta il nome di *pantografo di Scheiner*. Evidentemente al parallelogramma $CPP''C'$ si può sostituire il parallelogramma $CC'BA$, il cui lato CA è di lunghezza arbitraria.

Un altro pantografo-semplice di forma ben nota (pantografo sestilatero) si ottiene applicando la seconda proposizione fondamentale. Sia O il centro di una data similitudine, (C) e (C'), (C_1) e (C'_1) due coppie di circoli corrispondenti. Al punto P intersezione di (C) e (C_1), corrisponde nella data trasformazione il punto P' intersezione di (C') e (C'_1) (Fig. 5). Supponiamo che i circoli (C_1) e (C'_1) siano collegati rigidamente col segmento OC'_1; se questo si fa ruotare intorno ad O, i detti circoli restano costantemente corrispondenti, e quindi le loro intersezioni coi circoli (C) e (C'), i quali sono mantenuti immobili, sono anche sempre punti corrispondenti. Lo stesso ragionamento si può ripetere, scambiando le due coppie di circoli, e sostituendo il segmento OC' ad OC'_1. Da ciò segue, che tirando i sei segmenti OC', OC'_1, CP, C_1P, $C'P'$, C'_1P', e articolandoli in O, C, C', P', C'_1, C_1, P, si ottiene un sistema che soddisfa completamente alle condizioni imposte dalla seconda proposizione. Esso è dunque il pantografo cercato.

Proponiamoci ora di costruire un pantografo-rotatore, applicando la prima proposizione fondamentale. Sia O il centro di una data similitudine e il centro di una rotazione di ampiezza data. La trasformazione, che qui si considera, è il prodotto di due trasformazioni invertibili: una similitudine ed una rotazione di centro comune.

Per la prima di esse (Fig. 6) al circolo (C) corrisponde il circolo (C''); per la seconda al circolo (C'') corrisponde il circolo (C'). Quindi, per la trasformazione prodotto, a (C) corrisponde (C'), ed al punto P di (C) il punto P' di (C'). Costruiamo il triangolo $C O C'$, e supponiamo che i circoli (C) e (C') siano rigidamente collegati con esso. Se lo si fa ruotare intorno ad O, si vede che i circoli (C) e (C') restano costantemente corrispondenti nella data trasformazione; quindi COC' farà parte del sistema articolato che si cerca. Tiriamo ora il segmento $C'D$ uguale e parallelo a CP, e costruiamo il triangolo $D C' P'$. Questo triangolo è sempre lo stesso, qualunque siano i punti corrispondenti P e P' scelti sui circoli (C) e (C'); per conseguenza, se uniamo P con D, e supponiamo il parallelogramma $CPDC'$ articolato nei suoi vertici ed il lato CC' fissato nel piano, in ogni deformazione di esso i vertici P e P' saranno punti corrispondenti nella trasformazione considerata. Dunque il sistema articolato, composto del parallelogramma $CPDC'$ e dei triangoli COC', $C'DP'$, soddisfa le due condizioni richieste (prima proposizione); esso costituisce perciò un pantografo-rotatore.

La sua forma è analoga a quella del semplice rotatore rappresentato dalla Fig. 2, e può anche essere modificata, come abbiamo fatto precedentemente per il detto rotatore. Basta sostituire al parallelogramma $CPDC'$ il parallelogramma $OBDC'$, ed al triangolo OCC' il triangolo BPD; si ottiene così il noto *pantografo di Sylvester*.

La seconda proposizione fondamentale ci permette di giungere ad una nuova forma di pantografo-rotatore. Sia O il centro della similitudine e della rotazione. Per la trasformazione prodotto di queste due ai circoli (C) e (C_1) corrispondono i circoli (C') e (C_1'); quindi al punto P, intersezione di (C) e (C_1), corrisponde il punto P', intersezione di (C') e (C_1') (Fig. 7). Costruiamo il triangolo $C_1 O C_1'$ e facciamolo ruotare intorno ad O, supponendo rigidamente collegati con esso i circoli (C_1) e (C_1').

Evidentemente questi due circoli resteranno sempre corrispondenti nella data trasformazione, e poichè (C) e (C') sono ora immobili, anche

i punti d'intersezione P e P' saranno sempre corrispondenti. Lo stesso ragionamento si può ripetere scambiando le coppie di circoli, e sostituendo al triangolo $C_1 O C'_1$ il triangolo $C O C'$. Allora si conclude che il sistema formato dei triangoli $C O C'$, $C_1 O C'_1$, e dei segmenti CP, $C_1 P$, $C' P'$, $C'_1 P'$, articolati in O, C, P, C_1, C', P', C'_1, soddisfa le condizioni volute (seconda proposizione); esso rappresenta quindi il pantografo-rotatore cercato.

Inversori. — Un inversore è un sistema articolato, il quale permette di descrivere una figura inversa di un'altra rispetto ad un dato cerchio fondamentale *).

Un inversore notevolissimo, dovuto ad Hart, si ottiene applicando la prima proposizione fondamentale, benchè l'applicazione di essa non riesca così spontanea come per i sistemi articolati precedenti. Sia (O) il cerchio fondamentale dell'inversione, (C) e (C') (Fig. 8) due circoli corrispondenti. Tirando il segmento $C C'$, e supponendo rigidamente collegati con esso i circoli (C) e (C'), si vede che questi restano costantemente corrispondenti quando si fa ruotare $C C'$ intorno ad O.

Siano ora P e P' due punti corrispondenti sui circoli considerati; si avrà $OP . OP' = K^2$, essendo K il raggio del cerchio fondamentale. Ma, se prendiamo sopra la congiungente PP' un punto O_1, distante da P' quanto O è distante da P, è chiaro che si avrà ancora $O_1 P' . O_1 P = K^2$. Tiriamo allora la retta $C_1 C'_1$ in guisa che l'angolo $C'_1 O_1 O$ riesca uguale all'angolo $C' O O_1$, e prendiamo $O_1 C_1 = O C$, $O_1 C'_1 = O C'$. È evidente che i circoli di centro C_1 e C'_1, passanti l'uno per P' e l'altro per P, sono rispettivamente uguali ai circoli C e C', e sono corrispondenti rispetto al cerchio fondamentale (O_1), il quale è uguale ad (O).

Inoltre il circolo (C_1) è tangente a (C') in P', e il circolo (C'_1) è tangente a (C) in P, per cui C_1 giace sulla congiungente $C' P'$, e C'_1 sulla congiungente CP. Ma, se questo ragionamento si ripete per una coppia qualunque di punti corrispondenti su (C) e (C'), si scorge che i segmenti $C C'$, $C' C_1$, $C_1 C'_1$, $C'_1 C$ restano sempre della medesima lunghezza, come anche i segmenti CP e $C' P'$. Dunque il parallelogramma sghembo $C C'_1 C_1 C'$, supposto articolato nei suoi vertici, è tale che in ogni

*) Il cerchio fondamentale di una inversione è il cerchio che ha per centro il polo e per raggio il modulo dell'inversione.

sua deformazione i punti P e P' si mantengono corrispondenti nella data inversione, quando il lato CC' sia mantenuto fisso.

Da tutto quello che si è detto risulta, che il parallegramma in discorso, ma avente in comune col piano soltanto il punto O, soddisfa le due condizioni richieste dalla prima proposizione; esso costituisce perciò un inversore.

L'applicazione immediata della seconda proposizione fondamentale conduce subito alla forma più generale dell'inversore di Peaucellier (Fig. 9).

Sia (O) il cerchio fondamentale, (C) e (C') due circoli corrispondenti, (C_1) e (C'_1) altri due circoli pure corrispondenti. Al punto P, intersezione di (C) e (C_1), corrisponderà il punto P', intersezione di (C') e (C'_1). Tiriamo il segmento OC_1, e imaginiamo collegati rigidamente con esso i circoli (C'_1) e (C_1). Questi circoli restano sempre corrispondenti quando si fa ruotare C_1O intorno ad O, e quindi saranno anche sempre corrispondenti le loro intersezioni coi circoli (C') e (C) rispettivamente. Lo stesso ragionamento si può ripetere per la coppia (C), (C'), supposta collegata col segmento OC. Si conclude allora, che il sistema formato dei sei segmenti OC, CP, PC_1, OC_1, C'_1P', $C'P'$, articolati in O, C', C, P, C_1, C'_1, P', soddisfa le condizioni volute, e costituisce perciò un inversore.

Questo inversore può assumere varie forme, scegliendo convenientemente i circoli corrispondenti. Una forma notevole è quella rappresentata dalla Fig. 10, la quale si ottiene facendo passare per P due circoli, che racchiudano nel loro interno il cerchio fondamentale.

Proponiamoci ora di costruire un inversore-rotatore, cioè un sistema articolato, il quale permetta di descrivere una figura inversa di un'altra, ma girata di un certo angolo intorno al polo dell'inversione. Per ottenerlo faremo uso della seconda proposizione fondamentale.

La trasformazione che quì si deve realizzare è il prodotto di due trasformazioni invertibili: una inversione, ed una rotazione il cui centro è nel polo. Sia (O) il cerchio fondamentale dell'inversione (Fig. 11), e siano (C) e (C_1) due circoli qualunque che si tagliano, (C'') e (C''_1) i corrispondenti nella data inversione. Facciamo girare questi ultimi intorno ad O di un determinato angolo: essi andranno rispettivamente in (C') e (C'_1). Allora nella trasformazione prodotto ai circoli (C) e (C_1) corrispondono i circoli (C') e (C'_1), ed al punto P, intersezione di (C) e (C_1), corrisponderà il punto P', intersezione di (C') e (C'_1).

Ciò posto, costruiamo il triangolo OCC', e supponiamo i due circoli (C) e (C') rigidamente collegati con esso. Se si fa girare il detto triangolo intorno ad O, i circoli (C) e (C') restano sempre corrispondenti; ma essendo anche sempre corrispondenti i circoli (C_1) e (C'_1), perchè immobili, segue che il punto d'intersezione di (C) con (C_1) corrisponderà costantemente nella data trasformazione al punto intersezione di (C') con (C'_1). Lo stesso ragionamento si può ripetere scambiando tra loro i circoli mobili e i circoli fissi, e sostituendo al triangolo OCC' il triangolo $OC_1C'_1$. Da ciò risulta, che il sistema formato dei triangoli COC', $C_1OC'_1$, e dei segmenti C_1P, CP, $C'P'$, C'_1P', articolati in O, C_1, C, P, C', P', C'_1, soddisfa le condizioni richieste dalla seconda proposizione; per conseguenza esso costituisce l'inversore cercato.

Questo inversore può assumere evidentemente forme più o meno regolari, dipendenti dai circoli (C) e (C_1) che si scelgono e dall'ampiezza della rotazione; la quale, se è di $180°$, dà luogo all'inversore formato dei sei segmenti C_1P, CP, OE, OE_1, E_1Q, EQ, articolati in O, P, C, C_1, E, E_1, Q, come si vede nella Fig. 11.

Roma, marzo 1900.

PIETRO BURGATTI.

SULLE FUNZIONI ANALITICHE SOPRA LE SUPERFICIE DI RIEMANN.

Nota di **Giuseppe Vitali**, a Pisa.

Adunanza del 27 maggio 1900.

1. Sia R una qualunque superficie di Riemann e

$$G\left(\frac{1}{z-a}\right)=\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{C_n}{(z-a)^n}$$

una trascendente intera di $\frac{1}{z-a}$.

Supponiamo inoltre che A sia un punto della superficie R nel quale la variabile principale assuma il valore a.

Per un noto teorema *) noi sappiamo che esiste sopra la superficie R una funzione analitica θ_A la quale gode delle seguenti proprietà:

1° Che essa è regolare su tutta la superficie di Riemann fuori che nel punto A.

2° Che in un intorno del punto A è regolare la differenza

$$\theta_A - G\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

3° Che θ_A ammette dei periodi costanti ai tagli a_i e b_i della superficie di Riemann.

Nel libro « *Théorie des Fonctions Algébriques, etc.*, par P. Appell et E. Goursat. Paris, 1895, pag. 397-398 » è data la effettiva costruzione di una tale funzione mediante l'espressione

*) *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale* von Dr. C. Neumann. Zweite Auflage. 1884. Seite 465.

$$\sum_1^\infty \frac{C_n}{(n-1)!} Z_A^{n-1},$$

ove Z_A^{n-1} indica l'integrale abeliano normale di seconda specie che nel punto A si comporta come

$$\frac{(n-1)!}{(z-a)^n} + \text{funzione regolare}.$$

Questa espressione ci fornisce una funzione θ_A che gode dell'ulteriore proprietà di avere nulli i periodi ai tagli a_i.

Indichiamo con B_i i periodi di questa funzione ai tagli b_i, la cui espressione è data anch'essa nel libro citato di Appell e Goursat.

Poi consideriamo un punto B della superficie R e poniamo che gli ordini mancanti in B siano

$$k_1, \; k_2, \; \ldots \; k_p.$$

Allora siamo certi che indicando con $\varphi_i^k(B)$ il valore della derivata k^{esima} della nota funzione φ_i *) al punto B, il determinante

$$\Delta(B) = \begin{vmatrix} \varphi_1^{k_1-1}(B) & \varphi_1^{k_2-1}(B) & \ldots & \varphi_1^{k_p-1}(B) \\ \varphi_2^{k_1-1}(B) & \varphi_2^{k_2-1}(B) & \ldots & \varphi_2^{k_p-1}(B) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_p^{k_1-1}(B) & \varphi_p^{k_2-1}(B) & \ldots & \varphi_p^{k_p-1}(B) \end{vmatrix}$$

è diverso da zero.

Dunque il sistema d'equazioni

$$\begin{gathered} \lambda_1 \varphi_1^{k_1-1}(B) + \lambda_2 \varphi_1^{k_2-1}(B) + \ldots + \lambda_p \varphi_1^{k_p-1}(B) = B_1, \\ \lambda_1 \varphi_2^{k_1-1}(B) + \lambda_2 \varphi_2^{k_2-1}(B) + \ldots + \lambda_p \varphi_2^{k_p-1}(B) = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 \varphi_p^{k_1-1}(B) + \lambda_2 \varphi_p^{k_2-1}(B) + \ldots + \lambda_p \varphi_p^{k_p-1}(B) = B_p, \end{gathered}$$

è risolvibile.

Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ sono i valori che risolvono questo sistema, la funzione

$$Q_{AB} = \sum \frac{C_n}{(n-1)!} Z_A^{n-1} + (\lambda_1 Z_B^{k_1-1} + \lambda_2 Z_B^{k_2-1} + \ldots + \lambda_p Z_B^{k_p-1})$$

---

*) A scanso d'equivoci osservo che con $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ indico le derivate degli integrali abeliani normali che il Briot nella sua « *Théorie des fonctions abéliennes* » indica con $u_1, u_2, \ldots u_p$.

è senza periodi e non ha altre singolarità che un polo in B e una singolarità in A, tale che

$$Q_{AB} - \sum \frac{C_n}{(z - a)^n}$$

è regolare in un intorno di A.

2. Supponiamo che la superficie R che si considera sia ad m fogli.

Se w è una funzione algebrica irreducibile sopra questa superficie, qualunque funzione v analitica monodroma sulla superficie R si può mettere sotto la forma:

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \ldots + \alpha_{m-1} w^{m-1},$$

dove

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_{m-1}$$

sono funzioni analitiche monodrome nel piano e viceversa.

Naturalmente la v avrà al più le sue singolarità dove le ha la w e nei punti di R in cui la variabile principale ha i valori che ha la variabile del piano nei punti di singolarità delle

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_{m-1}.$$

3. Consideriamo la funzione Q_{AB} del n° 1. Per ciò che si è detto nel n° 2 si può porre

$$Q_{AB} = \alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \ldots + \alpha_{m-1} w^{m-1}$$

con

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_{m-1}$$

funzioni analitiche monodrome del piano.

Queste funzioni saranno manifestamente sviluppabili per serie di Laurent in un intorno del punto $z = a$.

Indichiamo con

$$\alpha'_0, \quad \alpha'_1, \quad \alpha'_2, \quad \ldots \quad \alpha''_{m-1}$$

le parti di questi sviluppi procedenti per potenze negative e con

$$\alpha''_0, \quad \alpha''_1, \quad \alpha''_2, \quad \ldots \quad \alpha''_{m-1}$$

le parti che procedono per potenze positive di $z - a$.

Le

$$\alpha'_0, \quad \alpha'_1, \quad \alpha'_2, \quad \ldots \quad \alpha'_{m-1}$$

saranno trascendenti intere di $\dfrac{1}{z - a}$.

La funzione

$$Q'_A = \alpha'_0 + \alpha'_1 w + \alpha'_2 w^2 + \ldots + \alpha'_{m-1} w^{m-1}$$

è una funzione analitica monodroma della superficie R ed ha le sue singolarità tutt'al più nei punti in cui la variabile principale assume i valori che assume nei poli di w e nel punto A.

Indichiamo con

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots \quad w_m$$

le m determinazioni di w sopra gli m piani che costituiscono la superficie R e supponiamo che il valore a sia diverso dai valori che assume su R la variabile principale nei poli di w e nel punto B.

In questa ipotesi le

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots \quad w_m$$

sono regolari in $z = a$ e quindi in un intorno di $z = a$ si sviluppano in serie di potenze positive di $(z - a)$ che indicheremo con

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots \quad R_m.$$

Allora negli intorni dei punti di R in cui la variabile principale assume il valore a, la funzione

$$Q_{AB} - Q'_A$$

si comporta come

$$\begin{gathered}
\alpha''_0 + \alpha''_1 R_1 + \alpha''_2 R_1^2 + \ldots + \alpha''_{m-1} R_1^{m-1}, \\
\alpha''_0 + \alpha''_1 R_2 + \alpha''_2 R_2^2 + \ldots + \alpha''_{m-1} R_2^{m-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha''_0 + \alpha''_1 R_m + \alpha''_2 R_m^2 + \ldots + \alpha''_{m-1} R_m^{m-1},
\end{gathered}$$

e quindi è regolare in tutti i punti della R in cui la variabile principale ha il valore a.

Ma la Q_{AB} è regolare in tutti questi punti tranne che nel punto A dove si comporta come

$$\sum \frac{C_n}{(z - a)^n} + \text{funzione regolare}.$$

Segue il teorema:

Se:

1° *w è una funzione algebrica irreducibile sopra una qualunque superficie R di Riemann ad m fogli;*

2° *A è un punto di questa superficie nel quale il valore a della va-*

riabile principale è diverso dai valori assunti da questa variabile nei poli di w;

3° $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ *è una trascendente intera di* $\frac{1}{z-a}$,

esiste una funzione analitica monodroma su R, che nel punto A si comporta come

$$G\left(\frac{1}{z-a}\right) + \text{funzione regolare},$$

che è altrove dappertutto regolare, eccezion fatta al più nei poli di w, e che è data da un'espressione

$$\alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots + \alpha_{m-1} w^{m-1},$$

nella quale le

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$$

sono trascendenti intere di $\frac{1}{z-a}$.

4. Siano

$$A_1, \quad A_2, \dots A_n, \dots$$

infiniti punti della superficie R aventi un unico punto limite L, ed indichiamo con

$$a_1, \quad a_2, \dots a_n, \dots$$

i valori che la variabile principale assume in quei punti.

Siano poi

$$G_1, \quad G_2, \dots G_n, \dots$$

delle trascendenti intere arbitrarie di

$$\frac{1}{z-a_1}, \quad \frac{1}{z-a_2}, \quad \dots \quad \frac{1}{z-a_n}, \dots .$$

Supponendo che nessuno dei punti A_n sia equivalente ad un polo di w ed al punto L, noi possiamo, per il teorema del n° 3, costruire sopra R una funzione v_n che si comporti nel punto A_n come

$$G_n + \text{funzione regolare},$$

che non abbia ulteriori singolarità che nei punti che sono poli di w e che si possa mettere sotto la forma

$$\alpha_{n,0} + \alpha_{n,1} w + \alpha_{n,2} w^2 + \dots + \alpha_{n,m-1} w^{m-1},$$

con

$$\alpha_{n,0}, \quad \alpha_{n,1}, \quad \alpha_{n,2}, \ldots \alpha_{n,m-1}$$

trascendenti intere di $\dfrac{1}{z - a_n}$.

Ora come dimostra il signor Mittag-Leffler, supponendo che non vi siano tra i punti A_n degli equivalenti fra loro, noi possiamo costruire delle funzioni analitiche monodrome del piano, che indicheremo con M_i ($i = 0, 1, 2, \ldots m - 1$), che nei punti $z = a_n$ si comportino come

$$\alpha_{n,i} + \text{funzione regolare}$$

e che siano fuori di questi punti regolari, eccezion fatta pel loro punto limite.

La funzione

$$\Omega = M_0 + M_1 w + M_2 w^2 + \ldots + M_{m-1} w^{m-1}$$

è una funzione analitica sulla superficie R che si comporta nei punti A_n come

$$G_n + \text{funzione regolare,}$$

ed altrove è sempre regolare, eccezion fatta pei punti equivalenti al punto L e pei poli di w, nei quali la Ω può avere delle singolarità essenziali isolate.

Questi punti sono in un numero finito.

Indichiamo questi punti con

$$A^{(1)}, \quad A^{(2)}, \ldots A^{(r)},$$

con

$$a^{(1)}, \quad a^{(2)}, \ldots a^{(r)}$$

i valori che ha in essi la variabile principale e con

$$\overline{G}_1\left(\frac{1}{z - a^{(1)}}\right), \quad \overline{G}_2\left(\frac{1}{z - a^{(2)}}\right), \quad \ldots \quad \overline{G}_r\left(\frac{1}{z - a^{(r)}}\right)$$

le trascendenti intere di

$$\frac{1}{z - a^{(1)}}, \quad \frac{1}{z - a^{(2)}}, \ldots \frac{1}{z - a^{(r)}},$$

che dànno la singolarità della funzione Ω nei detti punti.

Indicando con

$$Q_1, \quad Q_2, \ldots Q_r$$

delle funzioni analitiche monodrome sopra R che si comportino rispettivamente nei punti

$$A^{(1)}, \quad A^{(2)}, \ldots A^{(r)}$$

come

$$\overline{G}_1 + \text{funz. reg.}, \quad \overline{G}_2 + \text{funz. reg.}, \ \ldots \ \overline{G}_r + \text{funz. reg.}$$

e che non abbiano inoltre altre singolarità che un polo nel punto L, le quali funzioni noi abbiamo visto che si possono costruire, la funzione

$$\pi = \Omega - Q_1 - Q_2 - \ldots - Q_r$$

gode della proprietà che nei punti

$$A_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

si comporta come

$$G_n + \text{funzione regolare},$$

è monodroma su R ed è fuori dei punti A_n e del punto L dappertutto regolare.

Così risulta dimostrato un celebre teorema del sig. Mittag-Leffler, generalizzato per le superficie di Riemann.

Potrebbe darsi che alcuni dei punti A_n fossero equivalenti ad L o ai poli di w o anche fra loro, ma supponendo sempre che L non sia un punto di diramazione, questi punti sono in numero finito.

Escludendoli dapprincipio noi arriveremo dapprima ad una funzione come π che manca delle singolarità fissate in questo numero finito di punti.

Perchè acquisti anche queste singolarità, basterà aggiungere un ugual numero di funzioni analitiche e monodrome di R, che abbiano rispettivamente queste singolarità in quei punti e un polo in L.

Infine quando L fosse un punto di diramazione e fra i punti ve ne fossero infiniti sistemi di equivalenti, noi potremo spezzarli in un numero $n \leqq m$ di gruppi non contenenti punti fra loro equivalenti.

Costruiremo per ciascuno di questi gruppi una funzione monodroma di R che abbia nei punti del gruppo le date singolarità e che sia altrove regolare, eccetto che nel punto L. La somma di queste funzioni godrà della proprietà di essere monodroma su R e di non avere altre singolarità che una in L e quelle fissate nei punti A_n *).

Pisa, maggio 1900.

G. VITALI.

*) Un'altra dimostrazione del teorema di Mittag-Leffler esteso alle superficie di Riemann si trova nella Memoria del signor Appell: *Sur les fonctions uniformes d'un point analitique.* (Acta Mathematica, t. I, pp. 109-131). Essa è una generalizzazione del processo che si segue nel caso del piano.

SUI LIMITI PER $n = \infty$ DELLE DERIVATE n^{me} DELLE FUNZIONI ANALITICHE.

Nota di **Giuseppe Vitali**, in Pisa.

Adunanza del 27 maggio 1900.

1. Io mi propongo di vedere se esistono delle funzioni analitiche che ammettano in un punto regolare a distanza finita un limite finito della derivata n^{ma} per n tendente all'infinito.

Per questo suppongo che $f(z)$ sia una tale funzione.

Senza mancare alla generalità posso supporre che il punto nel quale essa ammette il limite della derivata n^{ma} per n tendente all'infinito sia l'origine.

Indico poi con a questo limite.

La $f(z)$ esisterà certo in un piccolo intorno C di $z = 0$ e in questo intorno si avrà:

$$f(z) = \sum_0^\infty {}_m a_m \frac{z^m}{m!}.$$

Ora poichè

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \sum_0^\infty {}_m a_{m+n} \frac{z^m}{m!},$$

è

$$\left(\frac{d^n f(z)}{dz^n}\right)_{z=0} = a_n,$$

e quindi a_n tende al limite determinato e finito a.

Segue che esisterà un numero reale e positivo A abbastanza grande per cui

$$|a_n| \leqq A,$$

qualunque sia n.

Dunque la serie

$$\sum a_m \frac{z^m}{m!}$$

è convergente in tutto il piano, ossia la $f(z)$ è una trascendente intera.

2. È poi

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} - a e^z = \sum (a_{n+m} - a) \frac{z^m}{m!}.$$

Ma poichè

$$\lim_{n=\infty} a_n = a,$$

si può trovare un n tale che per ogni n' maggiore o uguale ad n si abbia

$$|a_{n'} - a| < \varepsilon,$$

essendo ε una quantità piccola a piacere.

Per quell'n si ha

$$\left|\frac{d^n f(z)}{dz^n} - a e^z\right| < \varepsilon e^{|z|}.$$

Dunque per ogni z, col crescere abbastanza di n, la differenza

$$\left|\frac{d^n f(z)}{dz^n} - a e^z\right|$$

si può rendere piccola a piacere e quindi per ogni z

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{d^n f(z)}{dz^n} - a e^z\right| = 0,$$

ossia

$$\lim_{n=\infty} \frac{d^n f(z)}{dz^n} = a e^z.$$

Riassumendo:

Esistono infinite funzioni analitiche che ammettono un limite finito pel valore della derivata n^{ma} in un punto regolare col tendere di n all'infinito. Queste funzioni sono trascendenti intere particolari ed ammettono un limite per la derivata n^{ma} quando n tende all'infinito per ogni punto finito. Questo limite costituisce una funzione della forma $a e^z$, con a costante finita.

3. Da quanto precede risulta:

Se più funzioni analitiche in numero finito

$$u_1(z), \quad u_2(z), \quad \dots \quad u_p(z)$$

ammettono i limiti delle loro derivate n^{me} per n eguale all'infinito e questi limiti sono

$$a_1 e^z, \quad a_2 e^z, \ldots a_p e^z,$$

la funzione

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_p(z)$$

ammette pure il limite della derivata n^{ma} per n tendente all'infinito, e questo limite è

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)\, e^z.$$

4. Lemma. — *Siano*

$$a_0, \quad a_1, \ldots a_n, \ldots$$
$$b_0, \quad b_1, \ldots b_n, \ldots$$

due successioni semplicemente infinite di numeri complessi tendenti rispettivamente ai limiti finiti a e b. Se h e k sono due numeri reali positivi, la espressione

$$\Omega_n = \frac{\sum_0^n \binom{n}{s} a_s b_{n-s} h^s k^{n-s}}{(k+h)^n}$$

tende per n uguale all'infinito al limite ab.

Dimostrazione. Siano

$$p_0, \quad p_1, \ldots p_n, \ldots$$
$$q_0, \quad q_1, \ldots q_n, \ldots$$

le successioni dei rispettivi moduli e

$$\mu_0, \quad \mu_1, \ldots \mu_n, \ldots$$
$$\nu_0, \quad \nu_1, \ldots \nu_n, \ldots$$

quelle degli argomenti dei termini delle date successioni e infine siano

$$p, \quad q, \quad \mu, \quad \nu$$

i moduli e gli argomenti di a e b.

Supponiamo che $\mu + \nu$ sia compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ $\left(0 \text{ e } \frac{\pi}{2} \text{ esclusi}\right)$.

Poniamo quindi

$$\Omega_n = P_n + i\, Q_n$$

con P_n e Q_n reali.

Si ha

$$(h+k)^n P_n = \sum_0^n {}_s \binom{n}{s} p_s q_{n-s} h^s k^{n-s} \cos(\mu_s + \nu_{n-s})$$

$$= \left(\sum_0^{n'}{}_s + \sum_{n-m'}^{n}{}_s\right)\binom{n}{s} p_s q_{n-s} h^s k^{n-s} \cos(\mu_s + \nu_{n-s})$$

$$+ \sum_{n'+1}^{n-m'-1}{}_s \binom{n}{s} p_s q_{n-s} h^s k^{n-s} \cos(\mu_s + \nu_{n-s})$$

$$= \left(\sum_0^{n'}{}_s + \sum_{n-m'}^{n}{}_s\right)\binom{n}{s} h^s k^{n-s} [p_s q_{n-s} \cos(\mu_s + \nu_{n-s}) - p\, q \cos(\mu + \nu)]$$

$$+ \left(\sum_0^{n'}{}_s + \sum_{n-m'}^{n}{}_s\right)\binom{n}{s} h^s k^{n-s} p\, q \cos(\mu + \nu)$$

$$+ \sum_{n'+1}^{n-m'-1}{}_s \binom{n}{s} p_s q_{n-s} h^s k^{n-s} \cos(\mu_s + \nu_{n-s}).$$

Ora osserviamo che pel fatto che p_n, q_n, μ_n, ν_n tendono ai limiti determinati p, q, μ, ν e poichè $0 < \mu + \nu < \frac{\pi}{2}$, è possibile determinare n' ed m' in guisa che per $n > n'$ ed $m > m'$ sia sempre

$$0 < \mu_n + \nu_m < \frac{\pi}{2}$$

e

$$|p_n q_m \cos(\mu_n + \nu_m) - p\, q \cos(\mu + \nu)| < \varepsilon,$$

essendo ε una quantità prefissata piccola a piacere.

Indichiamo brevemente con P l'espressione

$$p\, q \cos(\mu + \nu),$$

che per l'ipotesi fatta è essenzialmente positiva.

È manifestamente per tali n' ed m'

$$\frac{\left(\sum_0^{n'}{}_s + \sum_{n-m'}^{n}{}_s\right)\binom{n}{s} h^s k^{n-s} p q \cos(\mu+\nu) + \sum_{n'+1}^{n-m'-1}{}_s \binom{n}{s} p_s q_{n-s} h^s k^{n-s} \cos(\mu_s + \nu_{n-s})}{(h+k)^n}$$

$$< \frac{(P+\varepsilon)\sum_0^n {}_s \binom{n}{s} k^s h^{n-s}}{(k+k)^n}$$

e, indicando con P'_n il primo membro di questa disuguaglianza:

$$P'_n < P + \varepsilon.$$

Si ha pure analogamente

$$P'_n > P - \varepsilon,$$

dunque

$$|P'_n - P| < \varepsilon.$$

È poi, indicando con M un valore più grande di tutti i p_n e di tutti i q_n:

$$\left|\frac{\left(\sum_0^{n'}{}_s + \sum_{n-m'}^{n}{}_s\right)\binom{n}{s} h^s k^{n-s}[p_s q_{n-s}\cos(\mu_s + \nu_{n-s}) - pq\cos(\mu+\nu)]}{(h+k)^n}\right|$$

$$< \frac{2M^2\left(\sum_0^{n'}{}_s + \sum_{n-m'}^{n}{}_s\right)\binom{n}{s} h^s k^{n-s}}{(h+k)^n};$$

ma per n abbastanza grande supposto $m' > n'$ e $k > h$, essendo $n' + m' + 2$ i termini della sommatoria $\left(\sum_0^{n'}{}_s + \sum_{n-m'}^{n}{}_s\right)\binom{n}{s} h^s k^{n-s}$, e per n abbastanza grande ed $s \leqq m'$ essendo $\binom{n}{s} \leqq \binom{n}{m'} < n^{m'}$, si ha

$$\frac{2M^2\left(\sum_0^{n'}{}_s + \sum_{n-m'}^{n}{}_s\right)\binom{n}{s} h^s k^{n-s}}{(h+k)^n} < \frac{2M^2(n'+m'+2)k^n\binom{n}{m'}}{(h+k)^n}$$

$$< \frac{2M^2(n'+m'+2)n^{m'}}{\left(\frac{k+k}{h}\right)^n},$$

e poichè

$$\frac{h+k}{k} > 1,$$

è

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^{m'}}{\left(\frac{h+k}{k}\right)^n} = 0.$$

Dunque si può fissare un n tanto grande che da esso in poi sia pure

$$\left|\frac{\left(\sum_0^{n'}{}_s + \sum_{n-m'}^{n}{}_s\right)\binom{n}{s} h^s k^{n-s}[p_s q_{n-s}\cos(\mu_s + \nu_{n-s}) - pq\cos(\mu+\nu)]}{(k+k)^n}\right| < \varepsilon.$$

Segue che da un n in poi è

$$|P_n - P| < 2\varepsilon$$

e quindi che P_n ha col crescere di n un limite che è P.

In modo del tutto analogo si prova che Q_n ha per $n = \infty$ un limite Q dato da $pq \operatorname{sen}(\mu + \nu)$.

Dunque anche Ω_n ha un limite per n tendente all'infinito ed è

$$\lim_{n=\infty} \Omega_n = P + iQ = pq[\cos(\mu + \nu) + i \operatorname{sen}(\mu + \nu)] = ab.$$

Se poi $\mu + \nu$ non è compreso fra o e $\frac{\pi}{2}$, ci possiamo sempre ridurre a questo caso moltiplicando per esempio le

$$b_0,\ b_1, \dots b_n, \dots$$

per un conveniente $e^{i\theta}$ tale che essendo $\nu' = \nu + \theta$, sia $0 < \mu + \nu' < \frac{\pi}{2}$.

Indicando con Ω'_n la Ω_n costruita per le due successioni

$$a_1,\quad a_2, \dots a_n,\quad \dots$$
$$b_1 e^{i\theta},\ b_2 e^{i\theta}, \dots b_n e^{i\theta}, \dots$$

si ha

$$\lim_{n=\infty} \Omega'_n = ab\,e^{i\theta}.$$

Ma

$$\Omega'_n = \Omega_n e^{i\theta},$$

dunque

$$\lim_{n=\infty} \Omega_n = ab.$$

Così è dimostrato completamente il lemma.

5. Siano

$$v_1 = \sum_0^\infty {}_n a_n \frac{(hz)^n}{n!}$$
$$v_2 = \sum_0^\infty {}_n b_n \frac{(kz)^n}{n!}$$

due funzioni che ammettono il limite della derivata n^{ma} per $n = \infty$ rispettivamente rispetto ad hz e a kz.

Allora le successioni

$$a_0,\ a_1, \dots a_n, \dots$$
$$b_0,\ b_1, \dots b_n, \dots$$

ammetteranno dei limiti a e b che supponiamo tutti e due finiti.

Indicando con

$$(v_1 v_2)^{(n)}_{z=0}$$

la derivata n^{ma} del prodotto $v_1 v_2$ rispetto a z nel punto $z=0$, si ha

$$(v_1 v_2)^n_{z=0} = \sum_0^n{}_s\, \Omega_n \binom{n}{s} a_s b_{n-s} h^s k^{n-s} = (h+k)^n \Omega_n,$$

donde

$$v_1 v_2 = \sum_0^\infty{}_n\, \Omega_n \frac{[(h+k)z)]^n}{n!}.$$

Ora supponiamo che h e k siano reali e positivi.

Si ha

$$\lim_{n=\infty} \Omega_n = a\,b.$$

Segue che *la funzione $v_1 v_2$ ha il limite della derivata n^{ma} rispetto ad $(h+k)z$ per $n=\infty$ tutte le volte che h e k sono reali e positivi e questo limite è il prodotto dei limiti delle derivate n^{me} di v_1 e v_2 rispetto ad hz e kz.*

È poi evidente che la cosa sta anche se h e k sono numeri complessi collo stesso argomento.

6. Si potrebbe domandare se il teorema precedente vale anche quando h e k sono numeri complessi con argomenti differenti.

Ora dimostriamo che se h e k non hanno lo stesso argomento, esistono sempre dei casi in cui il teorema non vale.

Perciò indichiamo con h e k stesse i moduli di h e k e con φ e $\varphi+\theta$ i loro argomenti rispettivi.

Si ha

$$\Omega_n = \frac{e^{in\varphi} \sum_0^n{}_s \binom{n}{s} a_s b_{n-s} h^s k^{n-s} e^{i(n-s)\theta}}{(h+ke^{i\theta})^n e^{in\varphi}}.$$

Ora poniamo

$$a_n = 1 \qquad (n=0,1,\dots\infty)$$

e

$$b_n = b + e^{-in\theta}\left|\frac{h+ke^{i\theta}}{h+k}\right|^n. \qquad (n=0,1,\dots\infty)$$

Abbiamo

$$\Omega_n = b\frac{\sum_0^n{}_s \binom{n}{s} h^s k^{n-s} e^{i(n-s)\theta}}{(h+ke^{i\theta})^n} + \frac{\sum_0^n{}_s \binom{n}{s} h^s k^{n-s}\left|\frac{h+ke^{i\theta}}{h+k}\right|^{n-s}}{(h+ke^{i\theta})^n}$$

$$= b + \frac{\sum_0^n{}_s \binom{n}{s} h^s k^{n-s}\left|\frac{h+ke^{i\theta}}{h+k}\right|^{n-s}}{(h+ke^{i\theta})^n},$$

[illegible]:

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible] > 1,$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]:

[illegible]

$$v_1, \quad v_2, \ldots v_p$$

[illegible] *per $n = \infty$ il limite delle loro* [illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] *rispetto ad*

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_p)z$$

[illegible] $b_1, \quad b_2, \ldots b_p$ [illegible] *gli stessi argomenti, e questo limite* *e* [illegible] *per $n = \infty$ delle*

$$v_1, \quad v_2, \ldots v_p$$

rispetto ad $b_1 z, \quad b_2 z, \ldots b_p z$.

Se $b_1, \quad b_2, \ldots b_p$ *non hanno lo stesso argomento, può non sussistere la cosa.*

Pisa, maggio 1900.

G. Vitali.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE.

Par M. G. **Mittag-Leffler**, à Stockholm.

(Extrait d'une Lettre à M. Émile Picard).

Adunanza del 24 giugno 1900.

. . . .

Dans vos « Lectures on Mathematics » à la « Decennial Celebration de « Clark University » vous parlez (p. 214) des différentes méthodes d'arriver à ce théorème de Weierstrass *), que chaque fonction réelle continue dans un intervalle fini peut toujours être représentée avec chaque approximation voulue par un polynôme.

Vous parlez de votre propre démonstration si élégante **), ainsi que d'une autre de M. Volterra ***). Je me permets d'appeler encore votre attention sur une démonstration qui doit être antérieure tant à la vôtre qu'à celle de M. Volterra. Elle est de M. Runge et se trouve dans son mémoire : *Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen,* que j'ai publié dans le tome 7 de mon journal †).

---

*) *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.* Erste Mittheilung. (Berliner Sitzungsbericht, 1885, p. 324). — Traduction Laugel, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4^e série, t. II (1886), p. 109.

**) Émile Picard, *Sur la représentation approchée des fonctions* [Comptes Rendus, t. CXII (1891), p. 183]; *Traité d'Analyse,* t. I, p. 258.

***) Vito Volterra, *Sul principio di Dirichlet* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XI (1897), pp. 83-86]. Encore une autre démonstration a été donnée par M. Lebesgue [Bulletin des Sciences Mathématiques, 2^e série, t. XXII (1898), p. 278].

†) Acta Mathematica, t. VII (1885), p. 387.

M. Runge se sert, pour la démonstration, de la fonction

$$\frac{1}{1+x^{2n}},$$

qui a la propriété

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{1+x^{2n}} = 1; \qquad |x| < 1,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{1+x^{2n}} = 0; \qquad |x| > 1.$$

C'est avec une modification sans importance la même fonction et la même propriété dont s'est servi antérieurement M. Tannery *) pour obtenir un autre théorème de Weierstrass **) qu'*on peut toujours former une série*

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} R_{\nu}(x),$$

où les $R_\nu(x)$ sont des fonctions rationnelles de x, telles que la série possède les propriétés suivantes:

$K^{(1)}$, $K^{(2)}$, ... $K^{(r)}$ *étant, dans le plan des x, r cercles différents qui n'ont aucune partie commune, elle représente dans chacune des $r+1$ régions différentes limitées par ces cercles une fonction différente* ***).

Il est vrai que M. Runge démontre seulement qu'une fonction réelle continue quelconque peut toujours dans un intervalle donné être représentée avec chaque approximation voulue par une *fonction rationnelle*, mais il a lui-même indiqué autre part †) comment il est possible

*) Voir: *Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques*, par M. Weierstrass; traduction de M. J. Tannery [Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, II^e^ série, t. V (1881), pp. 181-183]. — Weierstrass, *Werke*, Bd. II, pp. 231-233.

**) *Remarques*, etc., p. 177. — Weierstrass, *Werke*, Bd. II, p. 219.

***) Dans des publications récentes il paraît qu'on a un peu oublié que cette proposition tout-à-fait fondamentale a été mise pleinement en lumière dans le mémoire de Weierstrass.

†) *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* [Acta Mathematica, t. VI (1884), p. 236].

Je trouve sur ce sujet parmi mes papiers un article de M. Phragmén, de l'année 1886, ainsi conçu:

« In den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885 Juli, hat Herr Weierstrass die folgenden beiden Sätze bewiesen:

« SATZ B.—*Ist $f(x)$ eine stetige Function der reellen Veränderlichen x und wird*

d'exprimer dans un intervalle donné une fonction rationnelle avec chaque approximation voulue par un polynôme.

« *x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt, so lässt sich auf mannigfaltige Weise* « *eine* GANZE RATIONALE *Function $G(x)$ bestimmen, welche in dem festgesetzten Inter-* « *valle beliebig wenig von der Function $f(x)$ verschieden ist* ».

« SATZ D. — *Ist $f(x)$ eine Function der angegebenen Beschaffenheit, welche die* « *reelle Periode $2c$ besitzt, so lässt sich auf mannigfaltige Weise eine* GANZE RATIONALE « *Function der Functionen $\cos\frac{\pi x}{c}$ und $\sin\frac{\pi x}{c}$ bestimmen, welche für alle reelle Werthe* « *der Veränderlichen x beliebig wenig von $f(x)$ verschieden ist* ».

« Aus diesen Sätzen folgen unmittelbar die Sätze über die Darstellung der Func- « tionen der genannten Beschaffenheit in der Form gleichmässig convergirender « Reihen, deren Glieder ganze rationale Functionen von x, resp. von $\cos\frac{\pi x}{c}$ und « $\sin\frac{\pi x}{c}$ sind.

« In dem siebenten Bande der Acta Mathematica hat nun Herr Runge den « ersten dieser Sätze auf sehr einfache Weise in so fern bewiesen, dass er gezeigt « hat, dass man eine rationale Function $R(x)$ finden kann, welche das Gewünschte « leistet. Am Schlusse seines Aufsatzes bemerkt Herr Runge, dass man nach einem von « ihm in Acta Bd. 6 (in dem Aufsatz *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Func-* « *tionen*) gegebenen Satze die Form dieser rationalen Function auf mannigfache Weise « vereinfachen kann.

« Er scheint jedoch dabei übersehen zu haben—oder wahrscheinlich hat er darauf « kein Gewicht gelegt—dass man die rationale Function u. A. auch mit einer ganzen « ersetzen kann.

« In der That, der citirte Satz des Herrn Runge besagt, dass wenn eine ra- « tionale Function gegeben ist, deren sämmtliche Unendlichkeitsstellen innerhalb eines « gewissen zusammenhängenden Bereiches liegen, und wenn man in dem Innern dieses « Bereiches eine beliebige Stelle festsetzt, man stets auf mannigfache Weise eine ratio- « nale Function finden kann, welche nur auf der festgesetzten Stelle unendlich wird « und ausserhalb des betrachteten Bereiches beliebig wenig von der gegebenen Func- « tion verschieden ist. In unserem Fall nun giebt es einen zusammenhängenden Bereich, « welcher der Bedingung entspricht, dass die Unendlichkeitsstellen der Function $R(x)$ « und die Stelle $x=\infty$ innerhalb, das gegebene reelle Intervall aber ausserhalb dessel- « ben liegt. Man kann also die gefundene Function $R(x)$ durch eine andere ersetzen, « welche nur für $x=\infty$ unendlich wird, d. h. durch eine *ganze* rationale Function « $G(x)$. Ist die gegebene Function $f(x)$ reell, so ist der reelle Theil von $G(x)$ eine « *ganze* rationale Function, welche auch das Geforderte leistet.

« Wollte man dieses Resultat direkt herleiten, so könnte dies am einfachsten auf « die folgende Weise geschehen.

« Die rationale Function $R(x)$, wie sie Herr Runge bestimmt, ist eine reelle « Function und kann nur für imaginäre Werthe von x unendlich werden. Man kann

Je me permets, enfin, de vous communiquer une nouvelle démonstration que j'ai donnée dans mon cours et qui me paraît être plus élémentaire que toutes les autres démonstrations qui ont été proposées.

« also schreiben

$$R(x) = g(x) + r(x) + r'(x)$$

« wo $g(x)$ eine ganze rationale Function ist, $r(x)$ eine rationale Function, deren singu-« läre Stellen sämmtlich oberhalb der reellen Axe liegen, und $r'(x)$ die rationale « Function, welche man aus $r(x)$ erhält, wenn man alle Coefficienten im Zähler und « im Nenner mit ihren conjugirten Grössen vertauscht.

« Es ist nun immer möglich eine Stelle x_0 unterhalb der reellen Axe so zu « wählen, dass wenn man um x_0 mit angemessenem Radius einen Kreis beschreibt, das « gegebene reelle Intervall innerhalb, die singulären Stellen von $r(x)$ aber ausserhalb « derselben fallen. Dann kann man $r(x)$ in eine Potenzreihe nach ganzen positiven « Potenzen von $(x - x_0)$ entwickeln, welche in diesem Kreise gleichmässig convergirt.

« Man kann also aus der Summe einer hinreichend grossen Anzahl von Gliedern « dieser Reihe eine ganze rationale Function $h(x)$ bilden, welche in dem betrachteten « Kreise und also auch auf dem gegebenen Intervall beliebig wenig von $r(x)$ ver-« schieden ist. Ist $h'(x)$ die conjugirte Function von $h(x)$, so ist

$$|h'(x) - r'(x)| = |h(x) - r(x)|;$$

« also ist die ganze Function

$$g(x) + h(x) + h'(x)$$

« von der rationalen Function $R(x)$, also auch von der Function $f(x)$ beliebig wenig « verschieden.

« Den zweiten, oben citirten Satz des Herrn Weierstrass hat Herr Runge « in seinem Aufsatze nicht besprochen. Es ist aber auch dieser Satz eine unmittelbare « Folge aus den von Herrn Runge bewiesenen Sätzen. Herr Runge zeigt nämlich, « dass wenn $\varphi(u)$ eine stetige Function der reellen Veränderlichen u ist, welche für « $u = \pm\infty$ einen bestimmten Grenzwerth besitzt, so kann man die rationale Function « $R(u)$ so bestimmen, dass sie sich für *alle* reelle Werthe von u beliebig genau an « $\varphi(u)$ anschliesst.

« Setzen wir jetzt $u = \operatorname{tang}\frac{x\pi}{2c}$, so wird die periodische Function $f(x)$ im « zweiten Satze des Herrn Weierstrass zu einer eindeutigen und stetigen Function « $\varphi(u)$, welche für $u = \pm\infty$ sich dem Werthe $f(c)$ nähert. Es giebt also eine Function « $R(u) = R\left(\operatorname{tang}\frac{x\pi}{2c}\right)$, welche beliebig wenig von $f(x)$ verschieden ist. Diese « Function wird für keinen reellen Werth von u, also auch für keinen reellen Werth « von x unendlich.

« Setzt man $z = e^{\frac{x\pi i}{c}}$, woraus $u = i\frac{1 - z}{1 + z}$ folgt, so geht $R(u)$ in eine ratio-« nale Function der Veränderlichen z über, welche sich in einem von zwei concen-

L'expression limite

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x),$$

où

$$\chi_n(x) = 1 - 2^{1-(1+x)^n}$$

et x désigne une variable réelle plus grande que -1, possède évidemment les propriétés suivantes :

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x) = 1; \qquad x > 0$$

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x) = -1; \qquad x < 0$$

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x) = 0; \qquad x = 0.$$

J'entends maintenant par $F(x)$ une fonction de la variable réelle x, qui reste réelle et continue dans l'intervalle

$$B > b \geqq x \geqq a > A.$$

Il est toujours possible d'interpoler entre a et b les points

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r < a_{r+1} = b$$

de telle manière que la fonction $F(x)$ est représentée, avec une approximation voulue, par la ligne polygonale qui est dessinée par les lignes droites successives *)

$$F_\mu(x) = F(a_{\mu-1}) + [F(a_\mu) - F(a_{\mu-1})]\frac{x - a_{\mu-1}}{a_\mu - a_{\mu-1}}$$

$$\left\{\begin{matrix} a_{\mu-1} \leqq x \leqq a_\mu \\ \mu = 1, 2, \ldots r+1 \end{matrix}\right\}.$$

« trischen Kreisen begrenzten Gebiete regulär verhält. Man kann sie daher als eine « Summe zweier Functionen darstellen, von denen die eine innerhalb des äusseren, « die zweite ausserhalb des inneren Kreises sich regulär verhält. Die erste kann im « ringförmigem Gebiete beliebig genau durch eine ganze rationale Function von « $z = \cos\frac{x\pi}{c} + i\sin\frac{x\pi}{c}$, die zweite durch eine eben solche Function von

$$\frac{1}{z} = \cos\frac{x\pi}{c} - i\sin\frac{x\pi}{c}$$

« dargestellt werden.

« Wollte man die Entwickelbarkeit von $R\left(\tang\frac{x\pi}{2c}\right)$ in eine trigonometrische « Reihe als bekannt voraussetzen, so könnte natürlich der Beweis noch ein wenig « kürzer gestaltet werden ».

*) Cette remarque a déjà été faite par M. Runge dans son mémoire « *Ueber die Darstellung*, etc. ».

A cause des propriétés que j'ai indiquées pour la fonction $\chi_n(x)$, cette ligne polygonale, n étant pris suffisamment grand, est représentée avec chaque approximation voulue par l'expression

$$y_x = \frac{1}{2}[F_1(x) + F_{r+1}(x)] + \frac{1}{2}\sum_1^r{}^{\lambda}[F_\lambda(x) - F_{\lambda+1}(x)]\chi_n\left(\frac{a_\lambda - x}{B - A}\right),$$

qui n'est qu'une fonction entière transcendante de la variable x. Cette fonction peut donc toujours de son côté, dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, avec chaque approximation voulue, être représentée par un polynôme en x. Donc:

Soit $F(x)$ dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ une fonction réelle et continue de la variable réelle x. Soit encore δ une quantité positive si petite qu'elle soit. Il existe toujours un polynôme en x, soit $G(x)$, tel que la différence $F(x) - G(x)$ dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ soit en valeur absolue plus petite que δ.

C'est le théorème de Weierstrass qu'il s'agissait de démontrer.

Vous voyez que la même méthode peut être employée pour obtenir le théoreme analogue pour une fonction de plusieurs variables.

J'envisage, pour simplifier, une fonction de deux variables seulement.

Soit donc $F(x, y)$, pour le domaine

$$A < a \leqq x \leqq b < B, \qquad A' < a' \leqq y \leqq b' < B',$$

une fonction réelle et continue des deux variables réelles x et y. Il est toujours possible d'interpoler dans le domaine des x entre a et b les points

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r < a_{r+1} = b,$$

de telle manière que la fonction $F(x, y)$ pour tous les y appartenant au domaine $a' \leqq y \leqq b'$ soit représentée avec une approximation voulue par la ligne polygonale

$$F_\mu(x, y) = F(a_{\mu-1}, y) + [F(a_\mu, y) - F(a_{\mu-1}, y)]\frac{x - a_{\mu-1}}{a_\mu - a_{\mu-1}}$$

$$\left\{\begin{matrix} a_{\mu-1} \leqq x \leqq a_\mu \\ \mu = 1, 2, \ldots r+1 \end{matrix}\right\}.$$

Cette ligne polygonale est représentée d'un autre côté avec chaque approximation voulue par l'expression:

$$Z_{x,y} = \frac{1}{2}[F_1(x, y) + F_{r+1}(x, y)]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_1^r{}^{\lambda}[F_\lambda(x, y) - F_{\lambda+1}(x, y)]\chi_n\left(\frac{a_\lambda - x}{B - A}\right).$$

Cette expression de son côté peut toujours être représentée, avec chaque approximation voulue, par la fonction

$$\overline{F}(x, y) = \frac{1}{2}[F_1(x, y) + F_{r+1}(x, y)]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_1^r \lambda [F_\lambda(x, y) - F_{\lambda+1}(x, y)]\, g_{n,m}\left(\frac{a_\lambda - x}{B - A}\right),$$

où $g_{n,m}(x)$ désigne la somme des m premiers termes dans le développement de $\chi_n(x)$ suivant les puissances de x.

La fonction $\overline{F}(x, y)$ est un polynôme par rapport à x. Elle est, pour le domaine $a' \leqq y \leqq b'$, une fonction réelle et continue de la variable réelle y. On peut donc la représenter avec chaque approximation voulue par le polynôme

$$G(x, y) = \frac{1}{2}[\overline{F}_1(x, y) + \overline{F}_{r'+1}(x, y)]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_1^{r'} \lambda [\overline{F}_\lambda(x, y) - \overline{F}_{\lambda+1}(x, y)]\, \overline{g}_{n',m'}\left(\frac{a'_\lambda - y}{B' - A'}\right),$$

où

$$\overline{F}_\mu(x, y) = \overline{F}(x, a'_{\mu-1}) + [\overline{F}(x, a'_\mu) - \overline{F}(x, a'_{\mu-1})]\frac{y - a'_{\mu-1}}{a'_\mu - a'_{\mu-1}}$$
$$\left\{ \begin{array}{c} a'_{\mu-1} \leqq y \leqq a'_\mu \\ \mu = 1, 2, \ldots, r' + 1 \end{array} \right\},$$

les

$$a' = a'_0 < a'_1 < a'_2 < \cdots < a'_{r'} < a'_{r'+1} = b'$$

étant choisis d'une manière convenable, et $\overline{g}_{n',m'}(y)$ désigne la somme des m' premiers termes du développement de $\chi_{n'}(y)$ suivant les puissances de y.

Donc:

Soit $F(x, y)$, dans le domaine $a \leqq x \leqq b$, $a' \leqq y \leqq b'$, une fonction réelle et continue des variables réelles x et y. Soit encore δ une quantité positive si petite qu'elle soit. Il existe toujours un polynôme en x et y, soit $G(x, y)$, tel que la différence $F(x, y) - G(x, y)$ dans l'intervalle

$$a \leqq x \leqq b, \quad a' \leqq y \leqq b'$$

soit en valeur absolue plus petite que δ *).

---

*) Il paraît que vous êtes le premier qui a publié une extension du théorème de Weierstrass à plusieurs variables (*voir* votre cours, tome I, page 263). Weierstrass indique pourtant qu' il n' y a pas de difficulté de faire une telle extension

Vous trouverez bientôt dans un mémoire très-important de M. Helge von Koch sur les nombres premiers *) une autre application de la fonction discontinue $\chi_n(x)$.

Nous avions eu, M. von Koch et moi, indépendamment l'un de l'autre, l'idée d'employer cette fonction dans deux problèmes bien différents.

Djursholm, avril 1900.

G. Mittag-Leffler.

[*Ueber die analytische Darstellbarkeit*, etc. Zweite Mittheilung (Sitzungsber. der Pr. Akad. der Wiss., 1885, p. 457)]. Il donnait cette extension dans son cours à Berlin l'année 1884. Il employait pour y arriver, au lieu de l'intégrale simple

$$\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

l'intégrale multiple

$$\frac{1}{2^n\omega^n k^n}\int_s f(u_1, u_2, \dots u_n)\psi\left(\frac{u_1-x_1}{k}\right)\dots\psi\left(\frac{u_\mu-x_\mu}{k}\right)du_1\,du_2\dots du_n.$$

*) Comptes Rendus, t. CXXX (1900), pp. 1243-46. — Acta Mathematica, t. XXIV.

SULLE FORMOLE PER LA COMPOSIZIONE DI PIÙ MOVIMENTI FINITI.

Memoria del Dr. **Mattia Puglisi**, in Cefalù.

Adunanza del 24 giugno 1900.

Il Prof. R. Marcolongo nella sua Memoria *) « *Formole per la composizione di più movimenti finiti* », ha enunciati alcuni teoremi e date le formole generali per la composizione di più rotazioni intorno ad assi concorrenti o no, e per la composizione di più moti elicoidali. Sebbene sia di volo accennato al metodo che ha servito alla ricerca, le dimostrazioni in generale mancano. E poichè la dimostrazione di alcune formole non è agevole, così in questa Nota mi propongo studiare in modo particolare il lavoro del Marcolongo, dando le dimostrazioni dei varii teoremi e delle formole, ecc.

Per agevolare la lettura del presente lavoro, riporto per intero le « *Notazioni* » che il Marcolongo premette nella sua Memoria, cercando di dare la formola generale di qualche notazione.

Notazioni.

Ogni retta uscente dall'origine degli assi (raggio) è individuata dai tre coseni degli angoli che essa forma cogli assi; ogni altra retta (asse) è individuata da sei coordinate omogenee e cioè dai suoi coseni direttori (α, β, γ) e dai suoi tre momenti (λ, μ, ν) rispetto agli assi coordinati, definiti dalle:

$$\lambda = \gamma y - \beta z, \qquad \mu = \alpha z - \gamma x, \qquad \nu = \beta x - \alpha y,$$

*) Annali di Matematica pura ed applicata, t. XXVI (1897).

dove x, y, z sono le coordinate di un punto qualunque dell'asse; tra le coordinate omogenee hanno luogo le due relazioni:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Dati n assi (raggi) distinti, che indicheremo coi simboli $k_1, k_2, \dots k_n$, accenniamo con

$$(k_r k_s), \qquad [k_r k_s] \qquad (r < s),$$

rispettivamente: il coseno dell'angolo formato dai due assi k_r e k_s ed il sestuplo volume del tetraedro che ha per spigoli opposti due segmenti eguali ad uno sui due assi, cioè il momento dei due assi; per modo che:

$$(k_r k_s) = \cos(k_r k_s) = \alpha_r \alpha_s + \beta_r \beta_s + \gamma_r \gamma_s,$$

$$[k_r k_s] = \alpha_r \lambda_s + \beta_r \mu_s + \gamma_r \nu_s + \alpha_s \lambda_r + \beta_s \mu_r + \gamma_s \nu_r.$$

Poniamo ancora per compendio:

$$(k_i k_r k_s) = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix};$$

$$(i < r < s)$$

$$[k_i k_r k_s] = \begin{vmatrix} \lambda_i & \mu_i & \nu_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \lambda_r & \mu_r & \nu_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \lambda_s & \mu_s & \nu_s \end{vmatrix}.$$

Com'è noto, il determinante $(k_i k_r k_s)$ dicesi seno dell'angolo triedro formato da tre raggi i cui coseni sono α_i, β_i, γ_i, ecc., oppure seno dell'angolo di tre assi rispettivamente paralleli ai raggi considerati in quel determinato ordine.

Ciò posto consideriamo $2r$ assi (raggi) e con i coseni dei loro angoli due a due formiamo i prodotti r ad r in modo che in uno stesso prodotto non sia ripetuto un medesimo numero; assumiamo quindi un tal prodotto positivo o negativo secondo che la successione dei numeri presenta un numero pari o dispari di inversioni.

La somma algebrica dei prodotti così ottenuti sarà indicata con:

$$(k_1 k_2 \dots k_{2r}).$$

Essa conterrà $1.2.3.\dots(2r-1)$ termini e il numero dei termini positivi supera di uno quello dei negativi.

Accenneremo invece con

$$[k_1 k_2 \dots k_{2r}],$$

la somma algebrica dei prodotti formati con $r-1$ coseni e con uno dei tetraedri $[k_r k_s]$, seguendo le stesse norme di prima. Per esempio abbiamo:

$$(1\,2\,3\,4)=\cos(1\,2)\cos(3\,4)-\cos(1\,3)\cos(2\,4)+\cos(1\,4)\cos(2\,3),$$

$$\begin{aligned}[1\,2\,3\,4] &= \cos(1\,2)[3\,4]-\cos(1\,3)[2\,4]+\cos(1\,4)[2\,3]\\ &\quad+\cos(2\,3)[1\,4]-\cos(2\,4)[1\,3]+\cos(3\,4)[1\,2],\end{aligned}$$

e poi in generale:

$$(1\,2\,3\ldots 2r)=\sum(1\,2)(3\,4\ldots 2r);\quad [1\,2\ldots 2r]=\sum(1\,2)[3\,4\ldots 2r].$$

Consideriamo $2r+1$ assi e, colle stesse norme, formiamo i prodotti r ad r con $r-1$ coseni degli assi due a due e con uno dei seni degli assi tre a tre. La somma algebrica dei prodotti così ottenuta sarà indicata con

$$(k_1 k_2 \ldots k_{2r+1}),$$

e conterrà $1.3.5.\ldots(2r+1)\dfrac{r}{3}$ termini.

Finalmente accenneremo con

$$[k_1 k_2 \ldots k_{2r+1}]$$

la somma algebrica dei prodotti formati con $r-1$ coseni e con una delle espressioni $[k_i k_r k_s]$; con $r-2$ coseni, uno dei tetraedri $[k_i k_r]$ ed uno dei seni di tre degli assi, tenendo sempre ferme le stesse convenzioni riguardo ai numeri che figurano nel prodotto e riguardo ai segni dei singoli prodotti.

Così è per esempio:

$$\begin{aligned}(1\,2\,3\,4\,5) &= \mathrm{sen}(1\,2\,3)\cos(4\,5)-\mathrm{sen}(1\,2\,4)\cos(3\,5)+\mathrm{sen}(1\,2\,5)\cos(3\,4)\\ &\quad+\mathrm{sen}(1\,3\,4)\cos(2\,5)-\mathrm{sen}(1\,3\,5)\cos(2\,4)-\mathrm{sen}(2\,3\,4)\cos(1\,5)\\ &\quad+\mathrm{sen}(2\,3\,5)\cos(1\,4)-\mathrm{sen}(2\,4\,5)\cos(1\,3)+\mathrm{sen}(3\,4\,5)\cos(1\,2)\\ &\quad+\mathrm{sen}(1\,4\,5)\cos(2\,3)=\sum(1\,2\,3)(4\,5),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1\,2\,3\,4\,5] &= \cos(1\,2)[3\,4\,5]-\cos(1\,3)[2\,4\,5]+\ldots+[1\,2](3\,4\,5)-\ldots\\ &= \sum\cos(1\,2)[3\,4\,5]+\sum[1\,2](3\,4\,5);\end{aligned}$$

e poi in generale:

$$(1\,2\,3\,4\ldots 2r+1)=\sum(1\,2\,3)(4\ldots 2r+1);$$

$$[1\,2\,3\,4\ldots 2r+1]=\sum(1\,2)[3\,4\ldots 2r+1].$$

Alcune formole.

Poniamo:

$$a(n) = \alpha_n,\quad b(n) = \beta_n,\quad c(n) = \gamma_n;\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

e poi in generale:

$$a(1\,2\,3\ldots 2r-1) = \alpha_1(2\,3\ldots 2r-1) - \alpha_2(1\,3\ldots 2r-1) + \ldots$$
$$+ \alpha_{2r-1}(1\,2\ldots 2r-2) = \sum \alpha_1(2\,3\ldots 2r-1),$$

$$a(1\,2\,3\ldots 2r) = \beta_1 c(2\,3\ldots 2r) - \beta_2 c(1\,3\ldots 2r) + \ldots$$
$$- \beta_{2r} c(1\,2\ldots 2r-1) = \sum(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(3\,4\ldots 2r),$$

e due espressioni analoghe ottenute da queste con permutazioni circolari. È palese la regola con la quale si succedono i segni.

Di guisa che:

$$a(1\,2) = \beta_1 c(2) - \beta_2 c(1) = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1;$$
$$a(1\,2\,3) = \alpha_1(2\,3) - \alpha_2(1\,3) + \alpha_3(1\,2) = \sum\alpha_1(2\,3);$$
$$a(1\,2\,3\,4) = \beta_1 c(2\,3\,4) - \beta_2 c(1\,3\,4) + \beta_3 c(1\,2\,4) - \beta_4 c(1\,2\,3),$$

ossia

$$a(1\,2\,3\,4) = \beta_1\{\gamma_2(3\,4) - \gamma_3(2\,4) + \gamma_4(2\,3)\} - \beta_2\{\gamma_1(3\,4) - \gamma_3(1\,4) + \gamma_4(1\,3)\}$$
$$+ \beta_3\{\gamma_1(2\,4) - \gamma_2(1\,4) + \gamma_4(1\,2)\} - \beta_4\{\gamma_1(2\,3) - \gamma_2(1\,3) + \gamma_3(1\,2)\};$$

ovvero finalmente:

$$a(1\,2\,3\,4) = \sum(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(3\,4);$$

e così via per $a(1\,2\,3\,4\,5)$, $a(1\,2\,3\,4\,5\,6)$, ecc.

Fra queste quantità e le altre definite nel paragrafo precedente, hanno luogo alcune relazioni; noteremo le seguenti:

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} \alpha_{n+1} a(1\,2\ldots k) + \beta_{n+1} b(1\,2\ldots k) + \gamma_{n+1} c(1\,2\ldots k) = (1\,2\ldots k, n+1) \\ \alpha_{n+1}(1\,2\ldots 2r) + \beta_{n+1} c(1\,2\ldots 2r) - \gamma_{n+1} b(1\,2\ldots 2r) = a(1\,2\ldots 2r, n+1) \\ \alpha_{n+1}(1\,2\ldots 2r+1) + \gamma_{n+1} b(1\,2\ldots 2r+1) - \beta_{n+1} c(1\,2\ldots 2r+1) \\ \qquad = a(1\,2\ldots 2r+1, n+1). \end{cases}$$

Queste relazioni sono date dal Marcolongo senza le relative dimostrazioni.

Per dimostrare la prima formola incominciamo a considerare il caso di k pari. Indicando per brevità il primo membro di essa con φ, per le

notazioni precedenti, si ha:

$$\varphi = \alpha_{n+1}\sum(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(34\ldots k) + \beta_{n+1}\sum(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)(34\ldots k)$$
$$+ \gamma_{n+1}\sum(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(34\ldots k);$$

ossia *)

$$\varphi = \sum{}'\{(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)\alpha_{n+1}+(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)\beta_{n+1}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\gamma_{n+1}\}(34\ldots k);$$

ovvero

$$\varphi = \sum{}'(1\,2,\ n+1)(34\ \ldots\ k).$$

Aggiungendo al secondo membro la quantità nulla **)

$$\sum{}'(1\,2\,3)(45\ \ldots\ k,\ n+1),$$

ed osservando che

$$\sum{}'(1\,2,\ n+1)(34\ \ldots\ k) + \sum{}'(1\,2\,3)(45\ \ldots\ k,\ n+1)$$
$$= \sum(1\,2\,3)(45\ \ldots\ k,\ n+1),$$

si ha:

$$\varphi = \sum(1\,2\,3)(45\ \ldots\ k,\ n+1);$$

ossia finalmente per le notazioni premesse avanti:

$$\varphi = (1\,2\ \ldots\ k,\ n+1).$$

Per k dispari avremo:

$$\varphi = \alpha_{n+1}\sum\alpha_1(2\,3\ldots k) + \beta_{n+1}\sum\beta_1(2\,3\ldots k) + \gamma_{n+1}\sum\gamma_1(2\,3\ldots k);$$

ovvero:

$$\varphi = \sum{}'(\alpha_1\alpha_{n+1} + \beta_1\beta_{n+1} + \gamma_1\gamma_{n+1})(2\,3\ldots k) = \sum{}'(1,n+1)(2\,3\ldots k);$$

e finalmente per le solite notazioni:

$$\varphi = (1\,2\ldots k,\ n+1).$$

---

*) Con il $\sum{}'$ intendiamo indicare, una volta per sempre, che la sommatoria non deve estendersi all'elemento con indice $n+1$, ovvero all'elemento $n+1$.

**) Che la $\sum{}'(1\,2\,3)\,(45\ \ldots\ 2r,\ n+1)$ sia nulla lo proveremo facendo vedere che se essa è nulla per $2r$ lo sarà per $2r+2$. Infatti:

$$\sum{}'(1\,2\,3)(4\,5\ldots 2r+2, n+1) = (2r+1, 2r+2)\sum{}'(1\,2\,3)(4\,5\ldots 2r, n+1)$$
$$-(2r, 2r+2)\sum{}'(1\,2\,3)(4\,5\ldots 2r-1, 2r+1, n+1)+\ldots$$
$$+(1\,2)\sum{}'(3\,4\,5)(6\,7\ldots 2r+2, n+1).$$

Ciascuna delle sommatorie del secondo membro, per ipotesi, essendo nulla, lo sarà anche il primo membro.

Si verifica poi facilmente che $\sum{}'(1\,2\,3)\,(4, n+1) = 0$.

E così la prima formola rimane completamente dimostrata.

Dimostriamo adesso la seconda formola:

$$\alpha_{n+1}(1\,2\,\ldots\,2r)+\beta_{n+1}c(1\,2\,\ldots\,2r)-\gamma_{n+1}b(1\,2\,\ldots\,2r)$$
$$=a(1\,2\,\ldots\,2r,\ n+1).$$

Indicando al solito il primo membro con φ avremo:

$$\varphi=\alpha_{n+1}(1\,2\,\ldots\,2r)+\beta_{n+1}\sum(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(3\,4\,\ldots\,2r)$$
$$-\gamma_{n+1}\sum(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)(3\,4\,\ldots\,2r);$$

aggiungendo e togliendo al secondo membro la quantità $\alpha_{n+1}\sum_1^{2r}\alpha_1\alpha_2$, si ha:

$$\varphi=\alpha_{n+1}(1\,2\,3\,\ldots\,2r)$$
$$+\sum{}'\{\alpha_1(\alpha_2\alpha_{n+1}+\beta_2\beta_{n+1}+\gamma_2\gamma_{n+1})-\alpha_2(\alpha_1\alpha_{n+1}+\beta_1\beta_{n+1}+\gamma_1\gamma_{n+1})\}(3\,4\ldots 2r);$$

ovvero:

$$\varphi=\alpha_{n+1}(1\,2\,3\ldots 2r)+\sum{}'\{\alpha_1(2,\ n+1)-\alpha_2(1,\ n+1)\}(3\,4\ldots 2r);$$

ossia:

$$\varphi=\alpha_{n+1}(1\,2\ldots 2r)+\sum{}'\{\alpha_1(2\,3\ldots 2r,n+1)-\alpha_2(1\,3\ldots 2r,n+1)\}$$

e finalmente:

$$\varphi=a(1\,2\,\ldots\,2r,\ n+1).$$

Passiamo alla terza formola:

$$\alpha_{n+1}(1\,2\,\ldots\,2r+1)+\gamma_{n+1}b(1\,2\,\ldots\,2r+1)$$
$$-\beta_{n+1}c(1\,2\,\ldots\,2r+1)=a(1\,2\,\ldots\,2r+1,\ n+1).$$

Indicando, anche qui, il primo membro con φ avremo:

$$\varphi=\alpha_{n+1}\sum(1\,2\,3)(4\,5\,\ldots\,2r+1)+\gamma_{n+1}\sum\beta_1(2\,3\,\ldots\,2r+1)$$
$$-\beta_{n+1}\sum\gamma_1(2\,3\,\ldots\,2r+1);$$

ovvero:

$$\varphi=\sum{}'\alpha_{n+1}\{\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+\alpha_2(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)+\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)\}(4\,5\ldots 2r+1)$$
$$+\sum{}'(\beta_1\gamma_{n+1}-\beta_{n+1}\gamma_1)(2\,3\,\ldots\,2r+1).$$

Aggiungendo al secondo membro la quantità nulla seguente:

$$\sum{}'\beta_{n+1}\{\beta_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+\beta_2(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)+\beta_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)\}(4\,5\ldots 2r+1)$$
$$+\sum{}'\gamma_{n+1}\{\gamma_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+\gamma_2(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)+\gamma_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)\}(4\,5\ldots 2r+1),$$

si ha:

$$\varphi = \sum{}'(\beta_1\gamma_{n+1} - \beta_{n+1}\gamma_1)(23\ \dots\ 2r+1)$$
$$+ \sum{}'(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(3, n+1)(45\ \dots\ 2r+1);$$

ovvero:

$$\varphi = \sum{}'(\beta_1\gamma_{n+1} - \beta_{n+1}\gamma_1)(23\ \dots\ 2r+1)$$
$$+ \sum{}'(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(34\ \dots\ 2r+1, n+1);$$

ossia:

$$\varphi = \sum(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(34\ \dots\ 2r+1, n+1);$$

e finalmente:

$$\varphi = a(123\ \dots\ 2r+1, n+1).$$

Rimane così dimostrata anche la terza formola.

Poniamo inoltre:

$$a[n] = \lambda_n, \quad b[n] = \mu_n, \quad c[n] = \nu_n, \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

e poi in generale:

$$a[12\dots 2r-1] = \alpha_1[23\dots 2r-1] - \alpha_2[13\dots 2r-1] +$$
$$\dots + \alpha_{2r-1}(12\ \dots\ 2r-2] + \lambda_1[23\ \dots\ 2r-1]$$
$$- \lambda_2[13\ \dots\ 2r-1] + \dots + \lambda_{2r-1}[12\ \dots\ 2r-2],$$

e due espressioni analoghe per $b[123\dots 2r-1]$ e $c[123\dots 2r-1]$ formate rispettivamente colle β e μ e colle γ e ν. Pongasi ancora:

$$a[123\ \dots\ 2r] = \beta_1 c[23\ \dots\ 2r] - \beta_2 c[13\ \dots\ 2r] +$$
$$\dots - \beta_{2r}c[123\dots 2r-1] - \{\gamma_1 b[23\dots 2r] - \gamma_2 b[13\dots 2r] +$$
$$\dots - \gamma_{2r}b[123\ \dots\ 2r-1]\},$$

e due espressioni analoghe per $b[12\ \dots\ 2r]$ e $c[123\ \dots\ 2r]$, coll'avvertenza di prendere metà dei termini in $\beta_r\gamma_s$ che compariscono raddoppiati nel secondo membro di questa ultima relazione, quando in essa alle espressioni $c[23\ \dots\ 2r]$, $b[23\ \dots\ 2r]$ e simili si sostituiscono i valori dati dall'alt a notazione. Con questa avvertenza le notazioni precedenti possono scriversi più brevemente:

$$a[123\dots 2r-1] = \sum\alpha_1[23\dots 2r-1] + \sum\lambda_1(23\dots 2r-1),$$
$$a[123\ \dots\ 2r] = \sum(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)[34\ \dots\ 2r]$$
$$+ \sum(\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1)(34\ \dots\ 2r) - \sum(\gamma_1\mu_2 - \gamma_2\mu_1)(34\ \dots\ 2r).$$

Di guisa che:

$$a[1\,2] = \beta_1 c[2] - \beta_2 c[1] - \{\gamma_1 b[2] - \gamma_2 b[1]\}$$
$$= \{\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1\} - \{\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1\},$$
$$a[1\,2\,3] = \sum \alpha_1 [2\,3] + \sum \lambda_1 (2\,3),$$
$$a[1\,2\,3\,4] = \beta_1 c[2\,3\,4] - \beta_2 c[1\,3\,4] + \beta_3 c[1\,2\,4] - \beta_4 c[1\,2\,3]$$
$$- \{\gamma_1 b[2\,3\,4] - \gamma_2 b[1\,3\,4] + \gamma_3 b[1\,2\,4] - \gamma_4 b[1\,2\,3]\},$$

dove sostituendo alle espressioni $c[2\,3\,4]$, $b[2\,3\,4]$ e simili i loro valori, e tenendo presente l'avvertenza fatta avanti, otteniamo facilmente:

$$a[1\,2\,3\,4] = \sum (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)[3\,4] + \sum (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1)(3\,4)$$
$$- \sum (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)(3\,4);$$

e così via per $a[1\,2\,3\,4\,5]$, $a[1\,2\,3\,4\,5\,6]$.

Posto ciò, hanno luogo le seguenti relazioni:

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{l} a[1\,2\,\ldots\,r]\alpha_{n+1} + b[1\,2\,\ldots\,r]\beta_{n+1} + c[1\,2\,\ldots\,r]\gamma_{n+1} \\ + a(1\,2\,\ldots\,r)\lambda_{n+1} + b(1\,2\,\ldots\,r)\mu_{n+1} + c(1\,2\,\ldots\,r)\nu_{n+1} \\ = [1\,2\,3\,\ldots\,r,\ n+1], \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{III}) \left\{ \begin{array}{l} [1\,2\,3\,\ldots\,2r-1]\alpha_{n+1} + b[1\,2\,3\,\ldots\,2r-1]\gamma_{n+1} \\ - c[1\,2\,3\,\ldots\,2r-1]\beta_{n+1} + (1\,2\,3\,\ldots\,2r-1)\lambda_{n+1} \\ + b(1\,2\,3\,\ldots\,2r-1)\nu_{n+1} - c(1\,2\,3\,\ldots\,2r-1)\mu_{n+1} \\ = a[1\,2\,\ldots\,2r-1,\ n+1], \end{array} \right.$$

ed inoltre:

$$(\mathrm{IV}) \left\{ \begin{array}{l} [1\,2\,3\ldots 2r]\alpha_{n+1} + c[1\,2\,3\ldots 2r]\beta_{n+1} - b[1\,2\,3\ldots 2r]\gamma_{n+1} \\ + (1\,2\,3\ldots 2r)\lambda_{n+1} + c(1\,2\,3\ldots 2r)\mu_{n+1} - b(1\,2\,3\ldots 2r)\nu_{n+1} \\ = a[1\,2\,3\,\ldots\,2r,\ n+1]. \end{array} \right.$$

Per la dimostrazione della (II), indicando con φ il primo membro di essa, nel caso di r dispari si ha:

$$\varphi = \alpha_{n+1} \sum \alpha_1 [2\,3\,\ldots\,r] + \alpha_{n+1} \sum \lambda_1 (2\,3\,\ldots\,r) + \beta_{n+1} \sum \beta_1 [2\,3\,\ldots\,r]$$
$$+ \beta_{n+1} \sum \mu_1 (2\,3\,\ldots\,r) + \gamma_{n+1} \sum \gamma_1 [2\,3\,\ldots\,r] + \gamma_{n+1} \sum \nu_1 (2\,3\,\ldots\,r)$$
$$+ \lambda_{n+1} \sum \alpha_1 (2\,3\,\ldots\,r) + \mu_{n+1} \sum \beta_1 (2\,3\,\ldots\,r) + \nu_{n+1} \sum \nu_1 (2\,3\,\ldots\,r),$$

ossia:

$$\varphi = \sum{}' (\alpha_1 \alpha_{n+1} + \beta_1 \beta_{n+1} + \gamma_1 \gamma_{n+1})[2\,3\,\ldots\,r]$$
$$+ \sum{}' (\alpha_{n+1} \lambda_1 + \beta_{n+1} \mu_1 + \gamma_{n+1} \nu_1 + \lambda_{n+1} \alpha_1 + \mu_{n+1} \beta_1 + \nu_{n+1} \gamma_1)(2\,3\,\ldots\,r),$$

ovvero:

$$\varphi = \sum{}'(1,\, n+1)[2\,3\,\ldots\,r] + \sum{}'[1,\, n+1](2\,3\,\ldots\,r),$$

e finalmente:

$$\varphi = [1\,2\,3\,\ldots\,r,\, n+1].$$

Per r pari si ha:

$$\begin{aligned}
\varphi = {} & \alpha_{n+1}\sum(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)[3\,4\ldots r] + \alpha_{n+1}\sum(\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1)(3\,4\ldots r) \\
& - \alpha_{n+1}\sum(\gamma_1\mu_2 - \gamma_2\mu_1)(3\,4\ldots r) + \beta_{n+1}\sum(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)[3\,4\ldots r] \\
& + \beta_{n+1}\sum(\gamma_1\lambda_2 - \gamma_2\lambda_1)(3\,4\ldots r) - \beta_{n+1}\sum(\alpha_1\nu_2 - \alpha_2\nu_1)(3\,4\ldots r) \\
& + \gamma_{n+1}\sum(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[3\,4\ldots r] + \gamma_{n+1}\sum(\alpha_1\mu_2 - \alpha_2\mu_1)(3\,4\ldots r) \\
& - \gamma_{n+1}\sum(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)(3\,4\ldots r) + \lambda_{n+1}\sum(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(3\,4\ldots r) \\
& + \mu_{n+1}\sum(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)(3\,4\ldots r) + \nu_{n+1}\sum(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(3\,4\ldots r),
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
\varphi = {} & \sum{}'\{\alpha_{n+1}(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + \beta_{n+1}(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + \gamma_{n+1}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\}[3\,4\ldots r] \\
& + \sum{}'\{\alpha_{n+1}(\beta_1\nu_2 - \gamma_1\mu_2) + \beta_{n+1}(\gamma_1\lambda_2 - \alpha_1\nu_2) + \gamma_{n+1}(\alpha_1\mu_2 - \beta_1\lambda_2) \\
& \quad + \alpha_{n+1}(\gamma_2\mu_1 - \beta_2\nu_1) + \beta_{n+1}(\alpha_2\nu_1 - \gamma_2\lambda_1) + \gamma_{n+1}(\beta_2\lambda_1 - \alpha_2\mu_1) \\
& \quad + \lambda_{n+1}(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + \mu_{n+1}(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + \nu_{n+1}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\}(3\,4\ldots r),
\end{aligned}$$

ovvero ancora:

$$\varphi = \sum{}'(1\,2,\, n+1)[3\,4\,\ldots\,r] + \sum{}'[1\,2,\, n+1](3\,4\,\ldots\,r).$$

Aggiungendo al secondo membro la quantità nulla *)

$$\sum{}'(1\,2\,3)[4\,\ldots\,r,\, n+1] + \sum{}'[1\,2\,3](4\,\ldots\,r,\, n+1),$$

---

*) Che la $\sum{}'(1\,2\,3)[4\,\ldots\,r,\, n+1] + \sum{}'[1\,2\,3](4\ldots r,\, n+1)$, nel caso di r pari sia nulla, lo proveremo facendo vedere che se essa è nulla per r, lo sarà anche per $r+2$. Infatti

$$\begin{aligned}
& \sum{}'(1\,2\,3)[4\,\ldots\,r+2,\, n+1] + \sum{}'[1\,2\,3](4\,\ldots\,r+2,\, n+1) \\
& = (r+1,\, r+2)\left\{\sum{}'(1\,2\,3)[4\,\ldots\,r,\, n+1] + \sum{}'[1\,2\,3](4\,\ldots\,r,\, n+1)\right\} \\
& \quad - (r,\, r+2)\Big\{\sum{}'(1\,2\,3)[4\,\ldots\,r-1,\, r+1,\, n+1] \\
& + \sum{}'[1\,2\,3](4\ldots r-1,\, r+1,\, n+1)\Big\} + \ldots + (1\,2)\Big\{\sum{}'(3\,4\,5)[6\ldots r+1,\, n+1] \\
& \quad + \sum{}'[3\,4\,5](6\,\ldots\,r+2,\, n+1)\Big\}.
\end{aligned}$$

Ciascuna delle quantità comprese fra le $\{\;\}$ essendo nulla, per ipotesi, lo sarà anche il primo membro.

Si verifica facilmente che

$$\sum{}'(1\,2\,3)[4,\, n+1] + \sum{}'[1\,2\,3](4,\, n+1) = 0.$$

si ha:

$$\varphi = \sum{}' \{(1\,2,\, n+1)[3 \ldots r] + [1\,2,\, n+1](3 \ldots r) + (1\,2\,3)[4 \ldots r,\, n+1]$$
$$+ [1\,2\,3](4 \ldots r,\, n+1)\},$$

e finalmente

$$\varphi = [1\,2 \ldots r,\, n+1].$$

Rimane così dimostrata la formola (II).

Passiamo adesso alla formola (III). Indicando anche qui il primo membro con φ si ha:

$$\varphi = [1\,2 \ldots 2r-1]\alpha_{n+1} + (1\,2 \ldots 2r-1)\lambda_{n+1}$$
$$+ \gamma_{n+1}\sum \beta_1[2\,3 \ldots 2r-1] + \gamma_{n+1}\sum \mu_1(2\,3 \ldots 2r-1)$$
$$- \beta_{n+1}\sum \gamma_1[2\,3 \ldots 2r-1] - \beta_{n+1}\sum \nu_1(2\,3 \ldots 2r-1)$$
$$+ \nu_{n+1}\sum \beta_1(2\,3 \ldots 2r-1) - \mu_{n+1}\sum \gamma_1(2\,3 \ldots 2r-1),$$

ovvero:

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \sum{}'(\beta_1\gamma_{n+1} - \beta_{n+1}\gamma_1)[2\,3 \ldots 2r-1] \\ &+ \sum{}'(\beta_1\nu_{n+1} - \nu_1\beta_{n+1})(2\,3 \ldots 2r-1) \\ &- \sum{}'(\gamma_1\mu_{n+1} - \gamma_{n+1}\mu_1)(2\,3 \ldots 2r-1) \\ &+ [1\,2 \ldots 2r-1]\alpha_{n+1} + (1\,2 \ldots 2r-1)\lambda_{n+1}. \end{aligned}\right.$$

Si ha intanto:

$$\alpha_{n+1}[1\,2 \ldots 2r-1] + \lambda_{n+1}(1\,2 \ldots 2r-1)$$
$$= \alpha_{n+1}\sum [1\,2\,3](4\,5 \ldots 2r-1) + \alpha_{n+1}\sum (1\,2\,3)[4\,5 \ldots 2r-1]$$
$$+ \lambda_{n+1}\sum (1\,2\,3)(4\,5 \ldots 2r-1),$$

ovvero indicando il primo membro con k:

$$k = \sum{}' \{\alpha_{n+1}[1\,2\,3] + \lambda_{n+1}(1\,2\,3)\}(4\,5 \ldots 2r-1)$$
$$+ \alpha_{n+1}\sum (1\,2\,3)[4\,5 \ldots 2r-1],$$

ossia:

$$k = \sum{}' \left\{ \alpha_{n+1}\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_{n+1}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_{n+1}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \right.$$
$$\left. + \lambda_{n+1}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right\}(4\,5 \ldots 2r-1) + \sum{}' \alpha_{n+1}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}[4\,5 \ldots 2r-1].$$

Aggiungendo al secondo membro la quantità nulla seguente:

$$\sum{}' \left\{ \beta_{n+1} \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_{n+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \mu_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_{n+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \mu_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \mu_{n+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right\} (45 \ldots 2r-1)$$

$$+ \sum{}' \left\{ \gamma_{n+1} \begin{vmatrix} \nu_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_{n+1} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \nu_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_{n-1} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \nu_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \nu_{n+1} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right\} (45 \ldots 2r-1)$$

$$+ \sum{}' \beta_{n+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} [45 \ldots 2r-1] + \sum{}' \gamma_{n+1} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} [45 \ldots 2r-1],$$

e sviluppando i determinanti e sommando convenientemente si ha facilmente:

$$\begin{aligned} k = \sum{}' \Big\{ & \sum{}' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)[3, n+1) + \sum{}' (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1)(3, n+1) \\ & - \sum{}' (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)(3, n+1) \Big\} (45 \ldots 2r-1) \\ + \sum{}' \Big\{ & \sum{}' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)(3, n+1) \Big\} [45 \ldots 2r-1], \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} k = & \sum{}' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)[3, n+1](45 \ldots 2r-1) \\ & + \sum{}' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)(3, n+1)[45 \ldots 2r-1] \\ & + \sum{}' (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1)(3, n+1)(45 \ldots 2r-1) \\ & - \sum{}' (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)(3, n+1)(45 \ldots 2r-1). \end{aligned}$$

Essendo:

$$\begin{aligned} & [3, n+1](45 \ldots 2r-1) + (3, n+1)[45 \ldots 2r-1] \\ & \qquad = [34 \ldots 2r-1, n+1], \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} k = & \sum{}' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)[34 \ldots 2r-1, n+1] \\ & + \sum{}' (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1)(34 \ldots 2r-1, n+1) \\ & - \sum{}' (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)(34 \ldots 2r-1, n+1). \end{aligned}$$

Sostituendo questo valore di k nella (a) ed osservando che:

$$\sum{}'(\beta_1\gamma_{n+1}-\beta_{n+1}\gamma_1)[2\,3\,\ldots\,2r-1]+\sum{}'(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)[3\,4\,\ldots\,2r-1,\,n+1]$$
$$=\sum(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)[3\,4\,\ldots\,2r-1,\,n+1],$$

$$\sum{}'(\beta_1\nu_{n+1}-\nu_1\beta_{n+1})(2\,3\,\ldots\,2r-1)+\sum{}'(\beta_1\nu_2-\beta_2\nu_1)(3\,4\,\ldots\,2r-1,\,n+1)$$
$$=\sum(\beta_1\nu_2-\beta_2\nu_1)(3\,4\,\ldots\,2r-1,\,n+1),$$

$$\sum{}'(\gamma_1\mu_{n+1}-\gamma_{n+1}\mu_1)(2\,3\,\ldots\,2r-1)+\sum{}'(\gamma_1\mu_2-\gamma_2\mu_1)(3\,4\,\ldots\,2r-1,\,n+1)$$
$$=\sum(\gamma_1\mu_2-\gamma_2\mu_1)(3\,4\,\ldots\,2r-1,\,n+1),$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}\varphi=&\sum(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)[3\,4\,\ldots\,2r-1,\,n+1]\\&+\sum(\beta_1\nu_2-\beta_2\nu_1)(3\,4\,\ldots\,2r-1,\,n+1)\\&-\sum(\gamma_1\mu_2-\gamma_2\mu_1)(3\,4\,\ldots\,2r-1,\,n+1),\end{aligned}$$

ossia finalmente:

$$\varphi=a[1\,2\,\ldots\,2r-1,\,n+1].$$

Dimostriamo infine la formola (IV). Indicando al solito il primo membro con φ si ha:

$$\begin{aligned}\varphi=&[1\,2\ldots 2r]\alpha_{n+1}+(1\,2\ldots 2r)\lambda_{n+1}+\beta_{n+1}\sum(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)[3\,4\ldots 2r]\\&+\beta_{n+1}\sum(\alpha_1\mu_2-\alpha_2\mu_1)(3\,4\ldots 2r)-\beta_{n+1}\sum(\beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1)(3\,4\ldots 2r)\\&-\gamma_{n+1}\sum(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)[3\,4\ldots 2r]-\gamma_{n+1}\sum(\gamma_1\lambda_2-\gamma_2\lambda_1)(3\,4\ldots 2r)\\&+\gamma_{n+1}\sum(\alpha_1\nu_2-\alpha_2\nu_1)(3\,4\ldots 2r)+\mu_{n+1}\sum(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(3\,4\ldots 2r)\\&-\nu_{n+1}\sum(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)(3\,4\ldots 2r).\end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo al secondo membro la quantità:

$$\begin{aligned}&\alpha_{n+1}\sum\alpha_1\alpha_2[3\,4\,\ldots\,2r]+\alpha_{n+1}\sum\alpha_1\lambda_2(3\,4\,\ldots\,2r)\\&+\alpha_{n+1}\sum\alpha_2\lambda_1(3\,4\,\ldots\,2r)+\lambda_{n+1}\sum\alpha_1\alpha_2(3\,4\,\ldots\,2r),\end{aligned}$$

e sommando convenientemente si ottiene:

$$\begin{aligned}\varphi=&[1\,2\,\ldots\,2r]\alpha_{n+1}+(1\,2\,\ldots\,2r)\lambda_{n+1}\\&+\sum{}'\{\alpha_1(\beta_2\beta_{n+1}+\gamma_2\gamma_{n+1}+\alpha_2\alpha_{n+1})-\alpha_2(\beta_1\beta_{n+1}+\gamma_1\gamma_{n+1}+\alpha_1\alpha_{n+1})\}[3\,4\ldots 2r]\\&+\sum{}'\{\lambda_1(\alpha_2\alpha_{n+1}+\beta_2\beta_{n+1}+\gamma_2\gamma_{n+1})-\lambda_2(\alpha_1\alpha_{n+1}+\beta_1\beta_{n+1}+\gamma_1\gamma_{n+1})\}(3\,4\ldots 2r)\\&+\sum{}'\{\alpha_1(\alpha_2\lambda_{n+1}+\beta_2\mu_{n+1}+\gamma_2\nu_{n+1}+\alpha_{n+1}\lambda_2+\beta_{n+1}\mu_2+\gamma_{n+1}\nu_2)\\&\quad-\alpha_2(\alpha_1\lambda_{n+1}+\beta_1\mu_{n+1}+\gamma_1\nu_{n+1}+\alpha_{n+1}\lambda_1+\beta_{n+1}\mu_1+\gamma_{n+1}\nu_1)\}(3\,4\ldots 2r);\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\varphi = \alpha_{n+1}[1\,2\,\ldots\,2r] + \textstyle\sum'\{\alpha_1(2,\,n+1) - \alpha_2(1,\,n+1)\}[3\,4\,\ldots\,2r] \\ + \textstyle\sum'\{\lambda_1(2,\,n+1) - \lambda_2(1,\,n+1) + \alpha_1[2,\,n+1] \\ - \alpha_2[1,\,n+1]\}(3\,4\,\ldots\,2r) + \lambda_{n+1}(1\,2\ldots 2r).\end{aligned}$$

Possiamo scrivere ancora:

$$\begin{aligned}\varphi = \alpha_{n+1}[1\,2\ldots 2r] + \textstyle\sum'\{\alpha_1(2,\,n+1)[3\,4\ldots 2r] + \alpha_1[2,\,n+1](3\,4\ldots 2r) \\ - \alpha_2(1,\,n+1)[3\,4\ldots 2r] - \alpha_2[1,\,n+1](3\,4\ldots 2r)\} \\ + \textstyle\sum'\{\lambda_1(2,\,n+1) - \lambda_2(1,\,n+1)\}(3\,4\ldots 2r) + \lambda_{n+1}(1\,2\ldots 2r);\end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}\varphi = \{\alpha_{n+1}[1\,2\,\ldots\,2r] + \textstyle\sum'\alpha_1[2\,3\,\ldots\,2r,\,n+1]\} \\ + \{\lambda_{n+1}(1\,2\,\ldots\,2r) + \textstyle\sum'\lambda_1(2\,3\,\ldots\,2r,\,n-1)\};\end{aligned}$$

e finalmente:

$$\varphi = \textstyle\sum\alpha_1[2\,3\ldots 2r,\,n+1] + \sum\lambda_1(2\,3\ldots 2r,\,n+1) = a(1\,2\ldots 2r,\,n+1).$$

Composizione di più rotazioni finite intorno ad assi concorrenti.

Anche qui mi valgo delle notazioni del Marcolongo.

Due rotazioni eguali e dello stesso senso effettuate intorno ad assi paralleli si diranno equipollenti. Per esprimere che la rotazione $2\,\omega$ è effettuata intorno ad un asse di coordinate $(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\lambda,\,\mu,\,\nu)$, oppure intorno ad un raggio i cui coseni sono $(\alpha,\,\beta,\,\gamma)$, scriveremo brevemente:

$$2\,\omega(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\lambda,\,\mu,\,\nu) \qquad \text{oppure} \qquad 2\,\omega(\alpha,\,\beta,\,\gamma).$$

Parimente per indicare che un moto elicoidale di parametri $2\,\tau$, $2\,\omega$, cioè tale che la traslazione è $2\,\tau$ e la rotazione $2\,\omega$, è effettuato intorno ad un asse $(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\lambda,\,\mu,\,\nu,\,\tau)$, scriveremo:

$$2\,\tau,\ 2\,\omega(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\lambda,\,\mu,\,\nu);$$

e così ancora per indicare che la traslazione $2\,\tau$ è effettuata in una direzione i cui coseni sono $(a,\,b,\,c)$ scriveremo:

$$2\,\tau(a,\,b,\,c).$$

Consideriamo la rotazione $2\,\omega(\alpha,\,\beta,\,\gamma)$; diciamo x, y, z le coordinate di un punto, distante di uno dall'origine, prima della rotazione e poniamo:

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - z} = \frac{1 + z}{x - iy}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

$$l = \alpha \operatorname{tang} \omega, \quad m = \beta \operatorname{tang} \omega, \quad n = \gamma \operatorname{tang} \omega;$$

$$l_r = \alpha_r \operatorname{tang} \omega_r, \quad m_r = \beta_r \operatorname{tang} \omega_r, \quad n_r = \gamma_r \operatorname{tang} \omega_r.$$

Dopo la rotazione x, y, z, ζ, diventano rispettivamente x', y', z', ζ'; è noto che:

$$\zeta' = \frac{(1 + in)\zeta + i(l + im)}{1 - in + i(l - im)\zeta}. \tag{1}$$

Siano ora da comporre n rotazioni

$$2\,\omega_r(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r) \qquad (r = 1, 2, 3 \ldots n)$$

e poniamo

$$\cos \omega_r = c_r, \qquad \operatorname{sen} \omega_r = s_r;$$

$$a_r = c_r + i\gamma_r s_r, \qquad d_r = c_r - i\gamma_r s_r;$$

$$b_r = i(\alpha_r + i\beta_r)s_r, \qquad e_r = i(\alpha_r - i\beta_r)s_r.$$

Diciamo infine A_n, B_n, D_n, E_n, le quantità analoghe relative alla rotazione $2\,\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ risultante in quelle n date.

Per effetto della prima rotazione ζ diventa ζ' e per la (1):

$$\zeta' = \frac{(1 + in_1)\zeta + i(l_1 + im_1)}{1 - in_1 + i(l_1 - im_1)\zeta}$$

ossia, sostituendo i valori di l_1, m_1, n_1 e tenendo presente le ultime notazioni:

$$\zeta' = \frac{a_1\zeta + b_1}{d_1 + e_1\zeta}.$$

Alla sua volta ζ' per effetto della seconda rotazione $2\,\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ diventa

$$\zeta'' = \frac{a_2\zeta' + b_2}{d_2 + e_2\zeta'} = \frac{(a_2a_1 + b_2e_1)\zeta + (b_2d_1 + a_2b_1)}{(d_2d_1 + e_2b_1) + (d_2e_1 + e_2a_1)}.$$

D'altra parte la ζ per effetto della rotazione $2\,\omega(\alpha, \beta, \gamma)$, risultante delle due votazioni $2\,\omega_1$, $2\omega_2$, darà:

$$\zeta_1 = \frac{A_2\zeta + B_2}{D_2 + E_2\zeta}.$$

Dovendosi avere $\zeta'' = \zeta_1$, si hanno le seguenti relazioni:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_2a_1 + b_2e_1 = A_2, & d_2d_1 + e_2b_1 = D_2, \\ a_2b_1 + b_2d_1 = B_2, & d_2e_1 + e_2a_1 = E_2, \end{array}\right. \tag{a}$$

dalle quali si ottiene subito:

$$(b) \qquad \begin{vmatrix} A_2 & E_2 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

L'applicazione successiva della trasformazione (1) conduce facilmente alle seguenti formole:

$$(c) \quad \begin{cases} A_n = a_n A_{n-1} + b_n E_{n-1}, & D_n = d_n D_{n-1} + e_n B_{n-1}, \\ B_n = a_n B_{n-1} + b_n D_{n-1}, & E_n = d_n E_{n-1} + e_n A_{n-1}, \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{vmatrix} A_n & E_n \\ B_n & D_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} a_n & e_n \\ b_n & d_n \end{vmatrix}.$$

Moltiplicando ambo i membri per $\begin{vmatrix} a_{n+1} & e_{n+1} \\ b_{n+1} & d_{n+1} \end{vmatrix}$, tenendo presente la legge di formazione delle relazioni (c), si vede facilmente che la formola precedente, essendo vera per n rotazioni, lo è anche per $n+1$.

Possiamo enunciare quindi il

« Teorema I. — Le quantità A_n, B_n, D_n, E_n dipendono dalle a_r, « b_r, d_r, e_r in modo che

$$\begin{vmatrix} A_n & E_n \\ B_n & D_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} a_n & e_n \\ b_n & d_n \end{vmatrix},$$

« avvertendo di eseguire il prodotto del secondo membro nell'ordine sta- « bilito, moltiplicando le linee del primo determinante per le colonne « del secondo; poi le linee del determinante prodotto dei primi due, per « le colonne del terzo e così di seguito ».

Consideriamo le formole (a) del teorema precedente.

Nella prima di esse, $A_2 = a_2 a_1 + b_2 e_1$, sostituendo ad A_2, a_2, a_1, b_2, e_1 i loro valori avremo facilmente:

$$\cos\omega + i\gamma \operatorname{sen}\omega = \{c_1 c_2 - s_1 s_2 (\gamma_1\gamma_2 + \beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2)\}$$
$$+ i\{\gamma_1 s_1 c_2 + \gamma_2 c_1 s_2 - (\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1) s_1 s_2\},$$

dalla quale:

$$\cos\omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (1\,2)$$
$$\gamma \operatorname{sen}\omega = \gamma_1 s_1 c_2 - \gamma_2 c_1 s_2 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) s_1 s_2.$$

Dalla seconda formola:

$$B_2 = a_2 b_1 + b_2 d_1,$$

sostituendo si ottiene:

$$\alpha \operatorname{sen} \omega + i\beta \operatorname{sen} \omega = \alpha_1 c_2 s_1 - \beta_1 \gamma_2 s_1 s_2 + \alpha_2 c_1 s_2 + \beta_2 \gamma_1 s_1 s_2 + i(\beta_1 c_2 s_1 + \gamma_2 \alpha_1 s_1 s_2 - \alpha_2 \gamma_1 s_1 s_2 + \beta_2 c_1 s_2),$$

dalla quale:

$$\alpha \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2,$$

$$\beta \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \beta_1 + c_1 s_2 \beta_2 - (\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2) s_1 s_2.$$

Si ricaverebbero le medesime relazioni dalle altre due formole delle (a). Si ha quindi il

« Teorema II. — A due rotazioni $2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ « si può sostituire una rotazione unica $2\omega\ (\alpha, \beta, \gamma)$ tale che:

$$\cos \omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (1\,2),$$

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 \mp (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2, \\ \beta \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \beta_1 + c_1 s_2 \beta_2 \mp (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) s_1 s_2, \\ \gamma \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \gamma_1 + c_1 s_2 \gamma_2 \mp (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s_1 s_2, \end{cases}$$

« in cui è da tenere il segno —, se le rotazioni sono effettuate nell'or- « dine 1, 2; il segno + se nell'ordine inverso ».

Dopo ciò dimostriamo il

« Teorema III. — A più rotazioni $2\omega_r(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$, $(r = 1, 2, \ldots n)$ « si può sostituire una rotazione unica $2\omega(\alpha, \beta, \gamma)$; ed è:

$$(3)\quad \begin{cases} \cos \omega = c_1 c_1 \ldots c_n - \sum s_1 s_2 c_3 \ldots c_n (1\,2) \\ + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \ldots c_n (1\,2\,3\,4) - \ldots + \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \ldots c_n (1\,2\,3) \\ - \sum s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 c_6 \ldots c_n (1\,2\,3\,4\,5) + \ldots \pm s_1 s_2 \ldots s_n (1\,2 \ldots n), \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha \operatorname{sen} \omega = \sum s_1 c_2 c_3 \ldots c_n a(1) - \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \ldots c_n a(1\,2\,3) + \ldots \\ - \sum s_1 s_2 c_3 \ldots c_n a(1\,2) + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \ldots c_n a(1\,2\,3\,4) - \ldots \\ \pm s_1 s_1 \ldots s_n a(1\,2 \ldots n), \end{cases}$$

« e due analoghe che si ottengono con permutazioni circolari. Nell'ulti- « mo termine delle formole precedenti è da ritenersi il segno +, se « $n = 4h$, oppure $4h + 1$; il segno — negli altri casi. Le rotazioni si « intendono effettuate nell'ordine 1, 2, ... n » *).

*) Coll'espressione abbreviata $\sum s_1 s_2 c_3 \ldots c_n$ intendiamo la somma: $s_1 s_2 c_3 \ldots c_n (1\,2) + s_1 s_3 c_4 \ldots c_n (1\,3) + \ldots + s_{n-1} s_n c_1 c_2 \ldots c_{n-2} (n-1, n)$, e così per tutte le altre.

Ammesse vere queste relazioni per n rotazioni col sussidio delle formole (2) e colle relazioni (I), dimostriamo adesso che esse sono vere per $n+1$.

Infatti

$$\cos\omega' = c c_{n-1} - s s_{n+1}(\alpha\alpha_{n+1} + \beta\beta_{n+1} + \gamma\gamma_{n+1}).$$

Sostituendo a c, $s\alpha$, $s\beta$, $s\gamma$ i loro valori dati dalle (3), (4) e sommando convenientemente si ottiene:

$$\begin{aligned}
\cos\omega' = {} & c_1 c_2 \ldots c_n c_{n+1} \\
& -\{\textstyle\sum' s_1 s_{n+1} c_2 \ldots c_n(\alpha_1\alpha_{n+1}+\beta_1\beta_{n+1}+\gamma_1\gamma_{n+1})+\sum' s_1 s_2 c_3 \ldots c_n c_{n+1}(1\,2)\}+\ldots \\
& +\{\textstyle\sum' s_1 s_2 s_3 s_{n+1} c_4 \ldots c_n[\alpha_{n+1}a(1\,2\,3)+\beta_{n+1}b(1\,2\,3)+\gamma_{n+1}c(1\,2\,3)] \\
& \qquad +\textstyle\sum' s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \ldots c_n c_{n+1}(1\,2\,3\,4)\}-\ldots \\
& +\{\textstyle\sum' s_1 s_2 s_{n+1} c_3 \ldots c_n[\alpha_{n+1}a(1\,2)+\beta_{n+1}b(1\,2)+\gamma_{n+1}c(1\,2)] \\
& \qquad +\textstyle\sum' s_1 s_2 s_3 c_4 \ldots c_n c_{n+1}(1\,2\,3)\} \\
& -\{\textstyle\sum' s_1 s_2 s_3 s_4 s_{n+1} c_5 \ldots c_n[\alpha_{n+1}a(1\,2\,3\,4)+\beta_{n+1}b(1\,2\,3\,4)+\gamma_{n+1}c(1\,2\,3\,4)] \\
& \qquad +\textstyle\sum' s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 c_6 \ldots c_n c_{n+1}(1\,2\,3\,4\,5)\}+\ldots \\
& \mp s_1 s_2 \ldots s_n s_{n+1}[\alpha_{n+1}a(1\,2\ldots n)+\beta_{n+1}b(1\,2\ldots n)+\gamma_{n+1}c(1\,2\ldots n)] \\
& \pm s_1 s_2 \ldots s_n c_{n+1}(1\,2\ldots n).
\end{aligned}$$

Per le formole (I) ed osservando che:

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum' s_1 s_2 \ldots s_k c_{k+1} \ldots c_n s_{n+1}(1\,2 \ldots k,\, n+1) \\
& + \textstyle\sum' s_1 s_2 s_3 \ldots s_{k+1} c_{k+2} \ldots c_n c_{n+1}(1\,2 \ldots k+1) \\
& = \textstyle\sum s_1 s_2 \ldots s_{k+1} c_{k+2} \ldots c_{n+1}(1\,2 \ldots k+1),
\end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\cos\omega' = {} & c_1 c_2 \ldots c_{n+1} - \textstyle\sum s_1 s_2 c_3 \ldots c_{n+1}(1\,2) \\
& + \textstyle\sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \ldots c_{n+1}(1\,2\,3\,4) - \ldots + \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \ldots c_{n+1}(1\,2\,3) \\
& - \textstyle\sum s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 c_6 \ldots c_{n+1}(1\,2\,3\,4\,5) + \ldots \pm s_1 s_2 \ldots s_{n+1}(1\,2 \ldots n+1).
\end{aligned}$$

Per le formole poi che dànno i coseni direttori avremo:

$$\alpha' \operatorname{sen}\omega' = c_{n+1}\alpha s + c\alpha_{n+1}s_{n+1} - (\beta\gamma_{n+1} - \beta_{n+1}\gamma)s s_{n+1}.$$

Sostituendo a c, αs, βs, γs i loro valori e sommando convenientemente si ottiene:

$$\begin{aligned}\alpha' \operatorname{sen}\omega' = &\left\{\sum{}' s_1 c_2 c_3 \ldots c_n c_{n+1} a(1) + c_1 c_2 \ldots c_n s_{n+1} \alpha_{n+1}\right\} \\ &- \left\{\sum{}' s_1 s_2 s_{n+1} c_3 \ldots c_n [\alpha_{n+1}(1\,2) + \beta_{n+1} c(1\,2) - \gamma_{n+1} b(1\,2)] \right.\\ &\left. + \sum{}' s_1 s_2 s_3 c_4 \ldots c_n c_{n+1} a(1\,2\,3)\right\} + \ldots \\ &- \left\{\sum{}' s_1 s_{n+1} c_2 c_3 \ldots c_n[\gamma_{n+1} b(1) - \beta_{n+1} c(1)] + \sum{}' s_1 s_2 c_3 \ldots c_n c_{n+1} a(1\,2)\right\} \\ &+ \left\{\sum{}' s_1 s_2 s_3 s_4 s_{n+1} c_5 \ldots c_n [\alpha_{n+1}(1\,2\,3\,4) + \beta_{n+1} c(1\,2\,3\,4) - \gamma_{n+1} b(1\,2\,3\,4)] \right.\\ &\left. + \sum{}' s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 c_6 \ldots c_n c_{n+1} a(1\,2\,3\,4\,5)\right\} - \ldots \\ &\pm s_1 s_2 \ldots s_n s_{n+1} [\alpha_{n+1}(1\,2 \ldots n) + \beta_{n+1} c(1\,2 \ldots n) - \gamma_{n+1} b(1\,2 \ldots n)].\end{aligned}$$

Per le formole (I) ed osservando che:

$$\gamma_{n+1} b(r) - \beta_{n+1} c(r) = a(r,\, n+1),$$

$$\begin{aligned}&\sum{}' s_1 s_2 \ldots s_k c_{k+1} \ldots c_n s_{n+1} a(1\,2 \ldots k,\, n+1) \\ &+ \sum{}' s_1 s_2 \ldots s_{k+1} c_{k+2} \ldots c_n c_{n+1} a(1\,2 \ldots k+1) \\ &= \sum s_1 s_2 \ldots s_{k+1} c_{k+2} \ldots c_{n+1} a(1\,2 \ldots k+1),\end{aligned}$$

si ha finalmente:

$$\begin{aligned}\alpha' \operatorname{sen}\omega' = &\sum s_1 c_2 c_3 \ldots c_{n+1} a(1) - \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \ldots c_{n+1} a(1\,2\,3) + \ldots \\ &- \sum s_1 s_2 c_3 \ldots c_{n+1} a(1\,2) + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \ldots c_{n+1} a(1\,2\,3\,4) - \ldots \\ &\pm s_1 s_2 \ldots s_{n+1} a(1\,2 \ldots n+1).\end{aligned}$$

Le formole date essendo vere per due rotazioni, lo saranno quindi per tre, per un numero qualunque di rotazioni; e così il teorema rimane completamente dimostrato.

L'ampiezza e l'asse della rotazione risultante dipendono, a parità di altre condizioni, dall'ordine con cui si compongono le rotazioni singole; infatti, i primi due termini del valore di $\cos\omega$ non dipendono dall'ordine di composizione, tutti gli altri dipendono da questo ordine. Così per esempio per $n = 3$, qualunque sia l'ordine con cui si compongono le rotazioni, $\cos\omega$ non può avere che due valori soli cioè:

$$c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 (2\,3) - c_2 s_3 s_1 (1\,3) - c_3 s_1 s_2 (1\,2) \pm s_1 s_2 s_3 (1\,2\,3).$$

Supponendo le rotazioni infinitesime, si ottengono formole note.

Composizione di due rotazioni finite intorno ad assi non concorrenti.

Premettiamo i seguenti teoremi:

« TEOREMA IV. — Ad una rotazione $2\omega(\alpha, \beta, \dots \nu)$ si può so-
« stituire una rotazione equipollente $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$ seguita da
« una traslazione $2\tau(a, b, c)$ in cui, detta ρ la distanza tra i due assi, è:

$$\tau = \rho \operatorname{sen} \omega,$$

$$(5) \quad \begin{cases} \rho a = \operatorname{sen}\omega\{\beta(\nu-\nu') - \gamma(\mu-\mu')\} + \cos\omega(\lambda-\lambda'), \\ \rho b = \operatorname{sen}\omega\{\gamma(\lambda-\lambda') - \alpha(\nu-\nu')\} + \cos\omega(\mu-\mu'), \\ \rho c = \operatorname{sen}\omega\{\alpha(\mu-\mu') - \beta(\lambda-\lambda')\} + \cos\omega(\nu-\nu'). \end{cases}$$

« La direzione della traslazione è normale agli assi di rotazione ».

Infatti i coseni direttori della normale φ al piano dei due assi, come è noto, sono proporzionali a:

$$(y-y')\gamma-(z-z')\beta, \quad (z-z')\alpha-(x-x')\gamma, \quad (x-x')b-(y-y')\alpha;$$

ovvero a:

$$\lambda-\lambda', \quad \mu-\mu', \quad \nu-\nu',$$

dove con x, y, z, e x', y', z', indichiamo le coordinate dei punti d'incontro di ρ rispettivamente con gli assi $2\omega(\alpha, \beta, \dots \nu)$, $2\omega(\alpha, \beta, \dots \nu')$.

Sapendo dalla Meccanica che la traslazione 2τ forma col piano dei due assi ovvero con ρ un angolo uguale a $90^\circ-\omega$, ed osservando che

$$\sqrt{(\lambda-\lambda')^2+(\mu-\mu')^2+(\nu-\nu')^2}=\rho,$$

fra i coseni direttori di ρ, φ, delll'asse 2ω e della traslazione 2τ passano le relazioni:

$$a\frac{(x-x')}{\rho}+b\frac{(y-y')}{\rho}+c\frac{(z-z')}{\rho}=\operatorname{sen}\omega,$$

$$a\frac{(\lambda-\lambda')}{\rho}+b\frac{(\mu-\mu')}{\rho}+c\frac{(\nu-\nu')}{\rho}=\cos\omega,$$

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

Osservando che il determinante dei coefficienti di a, b, c è uguale a ± 1 a seconda della direzione della normale φ, dal sistema precedente si ricava subito:

$$a = \operatorname{sen}\omega\left\{\beta\frac{(\nu-\nu')}{\rho} - \gamma\frac{(\mu-\mu')}{\rho}\right\} + \cos\omega\frac{(\lambda-\lambda')}{\rho},$$

ossia

$$\rho a = \operatorname{sen}\omega\{\beta(\nu-\nu') - \gamma(\mu-\mu')\} + \cos\omega(\lambda-\lambda'),$$

e due analoghe.

« TEOREMA V. — Ad una rotazione $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$ e ad una « traslazione $2\tau(a, b, c)$ si può sostituire un moto elicoidale

$$2\tau_1,\ 2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu'),$$

« in cui:

$$(6)\qquad \tau_1 = \tau(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

$$(7)\quad \begin{cases} \lambda' \operatorname{sen}\omega = \lambda \operatorname{sen}\omega \pm \tau(\gamma b - \beta c)\operatorname{sen}\omega + \tau a \cos\omega - \tau_1 \alpha \cos\omega, \\ \mu' \operatorname{sen}\omega = \mu \operatorname{sen}\omega \pm \tau(\alpha c - \gamma a)\operatorname{sen}\omega + \tau b \cos\omega - \tau_1 \beta \cos\omega, \\ \nu' \operatorname{sen}\omega = \nu \operatorname{sen}\omega \pm \tau(\beta a - \alpha b)\operatorname{sen}\omega + \tau c \cos\omega - \tau_1 \gamma \cos\omega. \end{cases}$$

« È da assumere il segno $+$, se nei movimenti componenti precede la « rotazione; il segno $-$, se precede la traslazione ».

Infatti decomponiamo la traslazione 2τ in due, l'una $2\tau_1$ lungo l'asse 2ω, l'altra $2\tau_2(\xi, \eta, \zeta)$ normale, la quale insieme alla rotazione $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$ dà luogo ad una rotazione equivalente $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$, e quindi, pel teorema precedente, alle formole:

$$(a)\qquad \rho\xi = \operatorname{sen}\omega\{\beta(\nu-\nu') - \gamma(\mu-\mu')\} + \cos\omega(\lambda-\lambda'),$$

e due analoghe.

Indicando con θ l'angolo che la direzione $2\tau(a, b, c)$ forma con l'asse $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$ si ha subito:

$$\tau_1 = \tau\cos\theta = \tau(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Indicando con m, n, p i coseni della normale φ al piano delle direzioni $2\tau(a, b, c)$, $2\tau_1(\alpha, \beta, \gamma)$, per la Geometria Analitica, si hanno le relazioni:

$$m = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}(\beta c - \gamma b),\quad n = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}(\gamma a - \alpha c),\quad p = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}(\alpha b - \beta a).$$

E quindi i coseni direttori della componente $2\tau_2(\xi, \eta, \zeta)$, normale alla φ e a $2\tau_1$ sono date da:

$$\xi = \beta p - \gamma n,\qquad \eta = \gamma m - \alpha p,\qquad \zeta = \alpha n - \beta m.$$

Sostituendo nella prima di queste relazioni i valori di p ed n si ha:

$$\xi = \{\beta(\alpha b - \beta a) - \gamma(\gamma a - \alpha c)\} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}.$$

Sostituendo questo valore di ξ nella (a) e tenendo presente che

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\tau_2}{\tau},$$

$$\beta(\alpha b - \beta a) - \gamma(\gamma a - \alpha c) = \alpha \cos \theta - a,$$

si ha facilmente:

$$\rho \frac{\tau}{\tau_2}(\alpha \cos \theta - a) = \operatorname{sen} \omega \{\beta(\nu - \nu') - \gamma(\mu - \mu')\} + \cos \omega (\lambda - \lambda'),$$

ovvero essendo

$$\tau_2 = \rho \operatorname{sen} \omega, \qquad \tau \cos \theta = \tau_1:$$

$$\tau_1 \alpha - \tau a = \operatorname{sen}^2 \omega \{\beta(\nu - \nu') - \gamma(\mu - \mu')\} + (\lambda - \lambda') \operatorname{sen} \omega \cos \omega.$$

Parimenti si avrebbe:

$$\tau_1 \beta - \tau b = \operatorname{sen}^2 \omega \{\gamma(\lambda - \lambda') - \alpha(\nu - \nu')\} + (\mu - \mu') \operatorname{sen} \omega \cos \omega,$$

$$\tau_1 \gamma - \tau c = \operatorname{sen}^2 \omega \{\alpha(\mu - \mu') - \beta(\lambda - \lambda')\} + (\nu - \nu') \operatorname{sen} \omega \cos \omega.$$

Ponendo per brevità

$$u = \lambda - \lambda', \qquad v = \mu - \mu', \qquad w = \nu - \nu',$$

ed ordinando le tre relazioni precedenti rispetto ad u, v, w si ha:

$$\begin{aligned} u \cos \omega \operatorname{sen} \omega - v \gamma \operatorname{sen}^2 \omega + w \beta \operatorname{sen}^2 \omega &= \tau_1 \alpha - \tau a, \\ u \gamma \operatorname{sen}^2 \omega + v \operatorname{sen} \omega \cos \omega - w \alpha \operatorname{sen}^2 \omega &= \tau_1 \beta - \tau b, \\ - u \beta \operatorname{sen}^2 \omega + v \alpha \operatorname{sen}^2 \omega + w \operatorname{sen} \omega \cos \omega &= \tau_1 \gamma - \tau c. \end{aligned}$$

Da questo sistema si ricava senza difficoltà che il determinante dei coefficienti è uguale a $\operatorname{sen}^3 \omega \cos \omega$, quindi:

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 \omega \cos \omega} [(\tau_1 \alpha - \tau a)\{\operatorname{sen}^2 \omega \cos^2 \omega + \alpha^2 \operatorname{sen}^4 \omega\} \\ + (\tau_1 \beta - \tau b)\{\gamma \operatorname{sen}^3 \omega \cos \omega - \alpha \beta \operatorname{sen}^4 \omega\} \\ + (\tau_1 \gamma - \tau c)\{\alpha \gamma \operatorname{sen}^4 \omega - \beta \operatorname{sen}^3 \omega \cos \omega\}], \end{aligned}$$

ossia semplificando:

$$u = [\tau_1 \alpha - \tau_1 \alpha \operatorname{sen}^2 \omega - \tau(b\gamma - c\beta) \operatorname{sen} \omega \cos \omega - \tau a \cos^2 \omega] \frac{1}{\operatorname{sen} \omega \cos \omega};$$

ovvero semplificando ancora e sostituendo ad u il suo valore:

$$\lambda' \operatorname{sen} \omega = \lambda \operatorname{sen} \omega + \tau(b\gamma - c\beta) + \tau a \cos \omega - \tau_1 \alpha \cos \omega .$$

Parimente si avrebbero i valori di $\mu' \operatorname{sen} \omega$, $\nu' \operatorname{sen} \omega$.

Il teorema rimane così dimostrato.

Proponiamoci ora di comporre due rotazioni $2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots \nu_1)$, $2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots \nu_2)$.

Al sistema di queste due rotazioni potremo sostituire: la rotazione $2\omega_1$, una rotazione $2\omega_2'(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2', \mu_2', \nu_2')$ equipollente alla seconda, intorno ad un asse parallelo passante per un punto (x, y, z) del primo, seguita da una traslazione: $2\rho s_2(a, b, c)$. Le a, b, c per le (5) sono date da:

$$\rho a = s_2\{\beta_2(\nu_2 - \nu_2') - \gamma_2(\mu_2 - \mu_2')\} + c_2(\lambda_2 - \lambda_2')$$

e due analoghe.

Alle due rotazioni $2\omega_1$, $2\omega_2'$ possiamo sostituire una rotazione unica $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$; l'ampiezza e i coseni direttori dell'asse sono dati, per le (2), da:

$$\cos \omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (1\,2),$$

$$\alpha \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 \mp (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2,$$

e due analoghe.

Finalmente valendoci del teorema V troveremo gli elementi del moto elicoidale risultante.

La traslazione 2τ è quindi espressa per la (6) da:

$$\tau = \rho s_2 (a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

ossia:

$$\tau = s_2 \sum \{s_2[\beta_2(\nu_2 - \nu_2') - \gamma_2(\mu_2 - \mu_2')]$$

$$+ c_2(\lambda_2 - \lambda_2')\}\{c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2\} \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} .$$

Svolgendo la sommatoria, eseguendo i prodotti indicati e tenendo presente che

$$\nu_2 \gamma_2 + \mu_2 \beta_2 + \alpha_2 \lambda_2 = 0, \quad \nu_2' \gamma_2 + \mu_2' \beta_2 + \lambda_2' \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,$$

si vedrebbe senza difficoltà che i coefficienti di $s_1 s_2^2 c_2$, $s_2^3 c_1$, $c_1 c_2 s_2^2$ sono nulli e quindi:

$$\begin{aligned}\tau \operatorname{sen} \omega = & c_2^2 s_1 s_2 \{\alpha_1(\lambda_2 - \lambda_2') + \beta_1(\mu_2 - \mu_2') + \gamma_1(\nu_2 - \nu_2')\} \\ & - s_1 s_2^2 \{(\nu_2 - \nu_2')[\beta_2(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) - \alpha_2(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)] \\ & + (\mu_2 - \mu_2')[\alpha_2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) - \gamma_2(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)] \\ & + (\lambda_2 - \lambda_2')[\gamma_2(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) - \beta_2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)]\}.\end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo dentro le $\{\ \}$ del coefficiente di $s_1 s_2^2$ la quantità:

$$(\nu_2 - \nu_2')\gamma_1\gamma_2^2 + (\mu_2 - \mu_2')\beta_1\beta_2^2 + (\lambda_2 - \lambda_2')\alpha_1\alpha_2^2,$$

e facendo le debite semplificazioni, si ottiene subito:

$$\begin{aligned}\tau \operatorname{sen} \omega = & c_2^2 s_1 s_2 \{(\lambda_2 - \lambda_2')\alpha_1 + (\mu_2 - \mu_2')\beta_1 + (\nu_2 - \nu_2')\gamma_1\} \\ & + s_1 s_2^2 \{(\nu_2 - \nu_2')\gamma_1 + (\mu_2 - \mu_2')\beta_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')\alpha_1\},\end{aligned}$$

ovvero ancora:

$$\tau \operatorname{sen} \omega = s_1 s_2 \{(\lambda_2 - \lambda_2')\alpha_1 + (\mu_2 - \mu_2')\beta_1 + (\nu_2 - \nu_2')\gamma_1\}(c_2^2 + s_2^2).$$

Aggiungendo e togliendo dentro le $\{\ \}$ la quantità $\alpha_2\lambda_1 + \beta_2\mu_1 + \gamma_2\nu_1$ si ha:

$$\begin{aligned}\tau \operatorname{sen} \omega = & s_1 s_2 \{\alpha_2\lambda_1 + \beta_2\mu_1 + \gamma_2\nu_1 + \alpha_1\lambda_2 + \beta_1\mu_2 + \gamma_1\nu_2 \\ & - (\nu_2'\gamma_1 + \mu_2'\beta_1 + \lambda_2'\alpha_1 + \alpha_2\lambda_1 + \beta_2\mu_1 + \gamma_2\nu_1)\}.\end{aligned}$$

Essendo

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (\gamma_1 y - \beta_1 z), & \mu_1 &= (\alpha_1 z - \gamma_1 x), & \nu_1 &= (\beta_1 x - \alpha_1 y), \\ \lambda_2' &= (\gamma_2 y - \beta_2 z), & \mu_2' &= (\alpha_2 z - \gamma_2 x), & \nu_2' &= (\beta_2 x - \alpha_2 y), \\ \lambda' &= (\gamma\, y - \beta\, z), & \mu' &= (\alpha\, z - \gamma\, x), & \nu' &= (\beta\, x - \alpha\, y), \end{aligned}$$

dove x, y, z sono le coordinate del punto d'incontro degli assi $2\,\omega_1$, $2\,\omega_2'$, $2\,\omega$, si verifica facilmente che:

$$\nu_2'\gamma_1 + \mu_2'\beta_1 + \lambda_2'\alpha_1 + \gamma_2\nu_1 + \beta_2\mu_1 + \alpha_2\lambda_1 = 0;$$

e perciò otteniamo finalmente:

$$\tau \operatorname{sen} \omega = s_1 s_2 [1\,2].$$

Colle (7) si trovano le coordinate λ, μ, ν, dell'asse di moto elicoidale risultante. Infatti si ha:

$$(a)\quad \tau\alpha \cos\omega + \lambda \operatorname{sen}\omega = \lambda' \operatorname{sen}\omega + \beta s_2(\gamma b - \beta c) \operatorname{sen}\omega + \rho s_2 a \cos\omega.$$

Ora:

$$\lambda' \operatorname{sen}\omega = (\gamma y - \beta z) \operatorname{sen}\omega,$$

ossia:

$$\begin{aligned}\lambda' \operatorname{sen}\omega = & y\{c_2 s_1 \gamma_1 + c_1 s_2 \gamma_2 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) s_1 s_2\} \\ & - z\{c_2 s_1 \beta_1 + c_1 s_1 \beta_2 - (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) s_1 s_2\}.\end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo al secondo membro la quantità $\beta_1 \beta_2 x + \gamma_1 \gamma_2 x$, si ha facilmente:

$$\lambda' \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 (y \gamma_1 - z \beta_1) + c_1 s_2 (y \gamma_2 - z \beta_2)$$
$$- \{\beta_1(\beta_2 x - \alpha_2 y) - \beta_2(\beta_1 x - \alpha_1 y) - \gamma_1(\alpha_2 z - \gamma_2 x) + \gamma_2(\alpha_1 z - \gamma_1 x)\} s_1 s_2,$$

ovvero:

$$\lambda' \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda'_2 - \{(\beta_1 \nu'_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu'_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 .$$

Si ha pure:

$$\rho s_2(\gamma b - \beta c) \operatorname{sen} \omega + \rho s_2 a \cos \omega = s_2 \{\rho b . \gamma \operatorname{sen} \omega - \rho c . \beta \operatorname{sen} \omega + \rho a . \cos \omega\},$$

ossia:

$$\rho s_2 (\gamma b - \beta c) \operatorname{sen} \omega + \rho s_2 a \cos \omega$$
$$= s_2 [\{s_2 \gamma_2 (\lambda_2 - \lambda'_2) - s_2 \alpha_2 (\nu_2 - \nu'_2) + c_2 (\mu_2 - \mu'_2)\} \{ c_2 s_1 \gamma_1 + c_1 s_2 \gamma_2$$
$$- (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s_1 s_2\} - \{s_2 \alpha_2 (\mu_2 - \mu'_2) - s_2 \beta_2 (\lambda_2 - \lambda'_2)$$
$$+ c_2 (\nu_2 - \nu'_2)\} \{c_2 s_1 \beta_1 + c_1 s_2 \beta_2 - (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) s_1 s_2\}$$
$$+ \{s_2 \beta_2 (\nu_2 - \nu'_2) - s_2 \gamma_2 (\mu_2 - \mu'_2) + c_2 (\lambda_2 - \lambda'_2)\} \{c_1 c_2 - s_1 s_2 (1\, 2)\}].$$

Sviluppando i prodotti, sommando convenientemente e facendo le debite semplificazioni si trova:

$$\rho s_2 (\gamma b - \beta c) \operatorname{sen} \omega + \rho s_2 a \cos \omega = s_2 c_1 (\lambda_2 - \lambda'_2)$$
$$+ s_1 s_2^2 \{\gamma_1 (\mu_2 - \mu'_2) - \beta_1 (\nu_2 - \nu'_2)\} + s_1 s_2 c_2^2 \{\gamma_1 (\mu_2 - \mu'_2) - \beta_1 (\nu_2 - \nu'_2)\},$$

ovvero finalmente:

$$\rho s_2 (\gamma b - \beta c) \operatorname{sen} \omega + \rho s_2 a \cos \omega$$
$$= c_1 s_2 (\lambda_2 - \lambda'_2) + s_1 s_2 \{\gamma_1 (\mu_2 - \mu'_1) - \beta_1 (\nu_2 - \nu'_2)\} .$$

Sostituendo questo valore e quello trovato per $\lambda' \operatorname{sen} \omega$ nella (a), otteniamo facilmente:

$$\lambda \operatorname{sen} \omega + \tau \alpha \cos \omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 ,$$

e due analoghe.

Possiamo dunque enunciare il

« Teorema VI. — A due rotazioni

$$2\omega_1 (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1), \qquad 2\omega_2 (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2)$$

« si può sostituire un moto elicoidale 2τ, $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$ i cui « elementi sono:

(8) $\qquad \cos \omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (1\, 2), \qquad \tau \operatorname{sen} \omega = s_1 s_2 [1\, 2],$

$$
(9) \left\{ \begin{aligned} \alpha \operatorname{sen} \omega &= c_2 s_1 \alpha_2 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2 , \\ \lambda \operatorname{sen} \omega + \tau \alpha \cos \omega &= c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 . \end{aligned} \right.
$$

« e formole analoghe ».

Inversamente possiamo sostituire ad un dato moto elicoidale, ed in infiniti modi, il sistema di due rotazioni intorno a due assi. Fissato ad arbitrio uno di questi, per esempio $(\alpha_1 \ldots \nu_1)$, restano determinate le due rotazioni e l'altro asse. Infatti moltiplicando la prima delle (9) e le analoghe rispettivamente per λ_1, μ_1, ν_1, la seconda e le analoghe rispettivamente per α_1, β_1, γ_1 e sommando si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \nu + \alpha \lambda_1 + \beta \mu_1 + \gamma \nu_1) \operatorname{sen} \omega + \tau (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) \cos \omega \\
&= 2 c_2 s_1 (\alpha_1 \lambda_1 + \beta_1 \mu_1 + \gamma_1 \nu_1) + c_1 s_2 (\alpha_2 \lambda_1 + \beta_2 \mu_1 + \gamma_2 \nu_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \beta_1 \mu_2 + \gamma_1 \nu_2) \\
&- \{\lambda_1 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) + \mu_1 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) + \nu_1 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) + \alpha_1 (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) \\
&+ \beta_1 (\gamma_1 \lambda_2 - \gamma_2 \lambda_1) + \gamma_1 (\alpha_1 \mu_2 - \alpha_2 \mu_1) - \alpha_1 (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1) - \beta_1 (\alpha_1 \nu_2 - \alpha_2 \nu_1) \\
&\qquad - \gamma_1 (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)\} s_1 s_2 ,
\end{aligned}
$$

ossia, osservando che il primo e terzo termine del secondo membro sono nulli:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \nu + \alpha \lambda_1 + \beta \mu_1 + \gamma \nu_1) \cos \omega \\
&+ \tau (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) \cos \omega = c_1 s_2 [1\ 2] .
\end{aligned}
$$

E per le (8) si ha facilmente:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \nu + \alpha \lambda_1 + \beta \mu_1 + \gamma \nu_1) \operatorname{sen} \omega \\
&+ \tau (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) \cos \omega = \tau \operatorname{sen} \omega \operatorname{cotg} \omega_1 ,
\end{aligned}
$$

d'onde si ricava ω_1 e quindi c_1 ed s_1. Le sei equazioni (9) e una delle (8) possono quindi riguardarsi come sette equazioni lineari in $c_2, s_2 \alpha_2, \ldots, s_2 \nu_2$; sarà quindi individuata l'altra rotazione e le coordinate dell'altro asse. Non tutte le rette possono assumersi come assi della prima rotazione; occorre escludere quelle che appartengono al complesso lineare:

$$
(\alpha \lambda_1 + \ldots + \gamma_1 \nu) \operatorname{sen} \omega + \tau (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) \cos \omega = 0 .
$$

Questi due assi di rotazione non sono rette coniugate rispetto al complesso, a meno che le rotazioni siano infinitesime.

Possiamo dunque concludere che:

« Teorema VII. — Si può in infiniti modi sostituire ad un dato moto « elicoidale il sistema di due rotazioni intorno a due assi; scelto ad ar- « bitrio uno di questi, resta, in generale, determinato l'altro e le am-

« piezze delle due rotazioni; il sestuplo volume del tetraedro che ha per « spigoli opposti due segmenti rispettivamente eguali ad s_1 e s_2 sui due « assi di rotazione, è costante ».

Composizione di due o più moti elicoidali.

Supponiamo ora più generalmente di dover comporre un moto elicoidale $2\tau_1$, $2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ con una rotazione

$$2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2).$$

Alle due rotazioni $2\omega_1$, $2\omega_2$ per il teorema VI possiamo sostituire un moto elicoidale $2\tau'$, $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$ dove:

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\tau' = s_1 s_2 [1\,2]\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}, \qquad \cos\omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (1\,2), \\ &\alpha \operatorname{sen}\omega = c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1), \\ &\lambda' \operatorname{sen}\omega + \tau'\alpha\cos\omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 \\ &\quad - \{(\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1) - (\gamma_1\mu_2 - \gamma_2\mu_1)\} s_1 s_2 . \end{aligned}\right.$$

Così il sistema è ridotto all'altro $2\tau_1$, $2\tau'$, $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$, e, potendo invertire le traslazioni, all'altro $2\tau'$, $2\tau_1$, 2ω. Adesso pel teorema V, alla traslazione $2\tau_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ed alla rotazione $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$ possiamo sostituire un moto elicoidale $2\tau_2$, $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$ in cui

$$\tau_2 = \tau_1(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1),$$

$$\lambda \operatorname{sen}\omega = \lambda' \operatorname{sen}\omega - \tau_1(\gamma\beta_1 - \beta\gamma_1)\operatorname{sen}\omega + \tau_1\alpha_1\cos\omega - \tau_2\alpha\cos\omega.$$

Il sistema primitivo è dunque equivalente all'altro $2\tau'$, $2\tau_2$, 2ω, ossia avendo $2\tau'$ e $2\tau_2$ la medesima direzione, all'altro 2τ, 2ω, dove $\tau = \tau' + \tau_2$.

Nella espressione di τ_2 sostituendo ad α, β, γ i loro valori dati dalle (a), si ottiene senza difficoltà:

$$\tau_2 = \tau_1\{c_2 s_1 + c_1 s_2 (1\,2)\}\frac{1}{\operatorname{sen}\omega},$$

e quindi

$$\tau = \tau' + \tau_2 = s_1 s_2 [1\,2]\frac{1}{\operatorname{sen}\omega} + \tau_1\{c_2 s_1 + c_1 s_2 (1\,2)\}\frac{1}{\operatorname{sen}\omega},$$

ossia finalmente:

$$\tau \operatorname{sen}\omega = \tau_1\{c_2 s_1 + c_1 s_2 (1\,2)\} + s_1 s_2 [1\,2].$$

Sostituendo nell'espressione di $\lambda \operatorname{sen}\omega$ il valore di $\lambda' \operatorname{sen}\omega$ dato dalle

(a), si ha:

$$\lambda \operatorname{sen}\omega + (\tau' + \tau_2)\alpha\cos\omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2$$
$$- \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2$$
$$+ \tau_1 \{\gamma_1 \beta \operatorname{sen}\omega - \beta_1 \gamma \operatorname{sen}\omega + \alpha_1 \cos\omega\},$$

e finalmente sostituendo a $\beta \operatorname{sen}\omega$, $\gamma \operatorname{sen}\omega$, $\cos\omega$ i loro valori, otteniamo facilmente:

$$\lambda \operatorname{sen}\omega + \tau\alpha\cos\omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2$$
$$+ \tau_1 \{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\}.$$

Abbiamo quindi il

« Teorema VIII. — Ad un moto elicoidale $2\tau_1$, $2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$ « $\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ e ad una rotazione $2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ si può « sostituire un unico moto elicoidale 2τ, $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$; ed è:

$$(10)\quad \begin{cases} \tau \operatorname{sen}\omega = \tau_1\{c_2 s_1 + c_1 s_2 (1\,2)\} + s_1 s_2 [1\,2], \\ \lambda \operatorname{sen}\omega + \tau\alpha\cos\omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 \\ \qquad + \tau_1\{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\}, \end{cases}$$

« e due formole analoghe, mentre ω, α, β, γ sono definiti dalle stesse « formole del teorema VI ».

Supponiamo adesso di dovere comporre due moti elicoidali

$$2\tau_1,\ 2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1); \qquad 2\tau_2,\ 2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2).$$

Al sistema $2\tau_1$, $2\omega_1$; $2\tau_2$, $2\omega_2$ possiamo sostituire l'altro $2\tau_1$, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\tau_2$. Pel teorema precedente, al moto elicoidale $2\tau_1$, $2\omega_1$, e alla rotazione $2\omega_2$ si può sostituire un moto elicoidale $2\tau'$, $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$ in cui:

$$\tau' \operatorname{sen}\omega = \tau_1\{c_2 s_1 + c_1 s_2 (1\,2)\} + s_1 s_2 [1\,2]$$
$$\lambda' \operatorname{sen}\omega + \tau'\alpha\cos\omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2$$
$$+ \tau_1\{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\}.$$

Il sistema è così ridotto all'altro $2\tau'$, 2ω, $2\tau_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Alla rotazione $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$ ad alla traslazione $2\tau_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, pel teorema V possiamo sostituire un moto elicoidale $2\tau''$, $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$, in cui:

$$\tau'' = \tau_2(\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2),$$
$$\lambda \operatorname{sen}\omega = \lambda' \operatorname{sen}\omega + \tau_2(\gamma\beta_2 - \beta\gamma_2)\operatorname{sen}\omega + \tau_2\alpha_2\cos\omega - \tau''\alpha\cos\omega.$$

Il sistema primitivo è così ridotto all'altro

$$2\tau', \quad 2\tau'', \quad 2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu),$$

ossia avendo τ' e τ'' la medesima direzione, all'altro 2τ, 2ω, dove $\tau = \tau' + \tau''$.

Nella espressione di τ'' sostituendo ad α, β, γ i loro valori, si ottiene facilmente:

$$\tau'' = \tau_2\{c_1 s_2 + c_2 s_1 (1\,2)\}\frac{1}{\operatorname{sen}\omega},$$

e quindi

$$\tau = \tau' + \tau'' = \tau_1\{c_2 s_1 + c_1 s_2 (1\,2)\}\frac{1}{\operatorname{sen}\omega} + s_1 s_2 [1\,2]\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}$$
$$+ \tau_2\{c_1 s_2 + c_2 s_1 (1\,2)\}\frac{1}{\operatorname{sen}\omega};$$

ossia

$$\tau \operatorname{sen}\omega = s_1 c_2\{\tau_1 + \tau_2(1\,2)\} + s_2 c_1\{\tau_1(1\,2) + \tau_2\} + s_1 s_2 [1\,2].$$

Sostituendo nell'espressione di $\lambda \operatorname{sen}\omega$ il valore di $\lambda' \operatorname{sen}\omega$ si ha:

$$\lambda \operatorname{sen}\omega + (\tau' + \tau'')\alpha \cos\omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1) - (\gamma_1\mu_2 - \gamma_2\mu_1)\}s_1 s_2$$
$$+ \tau_2\{\beta_2\gamma \operatorname{sen}\omega - \gamma_2\beta \operatorname{sen}\omega + \alpha_2\cos\omega\} + \tau_1\{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)\}.$$

Sostituendo a $\gamma \operatorname{sen}\omega$, $\beta \operatorname{sen}\omega$, $\cos\omega$ i loro valori, si ottiene, come nel teorema precedente senza difficoltà:

$$\lambda \operatorname{sen}\omega + \tau\alpha \cos\omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1) - (\gamma_1\mu_2 - \gamma_2\mu_1)\}s_1 s_2$$
$$+ \tau_1\{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)\} + \tau_2\{\alpha_2 c_1 c_2 - \alpha_1 s_1 s_2 + c_2 s_1(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)\},$$

e quindi possiamo enunciare il

« TEOREMA IX. — A due moti elicoidali $2\tau_1$, $2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1,$
« $\mu_1, \nu_1)$, $2\tau_2$, $2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ si può sostituire un unico
« moto elicoidale 2τ, $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$; ed è:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \tau \operatorname{sen}\omega &= s_1 c_2\{\tau_1 + \tau_2(1\,2)\} + s_2 c_1\{\tau_1(1\,2) + \tau_2\} + s_1 s_2[1\,2], \\ \lambda \operatorname{sen}\omega + \tau\alpha\cos\omega &= c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1) - (\gamma_1\mu_2 - \gamma_2\mu_1)\}s_1 s_2 \\ &\quad + \tau_1\{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)\} \\ &\quad + \tau_2\{\alpha_2 c_1 c_2 - \alpha_1 s_1 s_2 + c_2 s_1(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)\}. \end{aligned}\right.$$

Applicando successivamente i teoremi VI e VIII, potremo comporre tre, quattro rotazioni intorno ad assi qualunque, e stabilire le formole generali per la composizione di n rotazioni.

Ciò posto passiamo al

« TEOREMA X. — Ad n rotazioni

$$2\omega_r(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \lambda_r, \mu_r, \nu_r), \qquad (r = 1, 2, \dots n),$$

« si può sostituire un unico moto elicoidale 2τ, $2\omega(\alpha, \beta, \dots \nu)$; le « grandezze 2ω, α, β, γ sono definite dalle formole (4); per le altre « valgono le formole seguenti:

$$(12)\quad \begin{cases} \tau \operatorname{sen}\omega = \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_n[1\,2] - \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots [1\,2\,3\,4] + \dots \\ - \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n[1\,2\,3] + \sum s_1 s_2 \dots s_5 c_6 \dots c_n[1\,2\,3\,4\,5] - \dots \\ \qquad \pm s_1 s_2 \dots s_n[1\,2 \dots n]; \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} \lambda \operatorname{sen}\omega + \tau\alpha\cos\omega = \sum s_1 c_2 \dots c_n a[1] - \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n a[1\,2\,3] + \dots \\ \quad - \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_n a[1\,2] + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_n a[1\,2\,3\,4] - \dots \\ \qquad \pm s_1 s_2 \dots s_n a[1\,2 \dots n]; \end{cases}$$

« e due formole analoghe. Le rotazioni si compongono nell'ordine « 1, 2, ... n ».

Queste formole si provano vere per $n+1$ rotazioni, ammettendole vere per n e tenendo presente le (II), (III) e (IV).

Infatti, componendo il moto elicoidale risultante dalla composizione delle prime n rotazioni con la rotazione $2\omega_{n+1}(\alpha_{n+1} \dots \nu_{n+1})$, pel teorema VIII, avremo:

$$\tau' \operatorname{sen}\omega' = \tau\{c_{n+1}s + c s_{n+1}(\alpha\alpha_{n+1} + \beta\beta_{n+1} + \gamma\gamma_{n+1})\}$$
$$+ s s_{n+1}(\lambda\alpha_{n+1} + \mu\beta_{n+1} + \nu\gamma_{n+1} + \alpha\lambda_{n+1} + \beta\mu_{n+1} + \gamma\nu_{n+1}),$$

ossia

$$\tau' \operatorname{sen}\omega' = c_{n+1}\tau s + s_{n+1}\alpha_{n+1}(\tau c\alpha + \lambda s) + s_{n+1}\beta_{n+1}(\tau c\beta + \mu s)$$
$$+ s_{n+1}\gamma_{n+1}(\tau c\gamma + \nu s) + \lambda_{n+1}s_{n+1}\alpha s + \mu_{n+1}s_{n+1}\beta s + \nu_{n+1}s_{n+1}\gamma s.$$

Sostituendo in luogo di τs, $\tau c\alpha + \lambda s$, $\tau c\beta + \mu s$, $\tau c\gamma + \nu s$ i loro valori dati dalle (12) e (13), ed in luogo di αs, βs, γs i valori dati dalle (3), sommando convenientemeute si ottiene:

$$\tau' \operatorname{sen}\omega' = s_{n+1}\sum{}' s_1 c_2 \dots c_n\{a[1]\alpha_{n+1} + b[1]\beta_{n+1} + c[1]\gamma_{n+1}$$
$$+ a(1)\lambda_{n+1} + b(1)\mu_{n+1} + c(1)\nu_{n+1}\} + c_{n+1}\sum s_1 s_2 c_3 \dots c_n[1\,2]$$
$$- s_{n+1}\sum{}' s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n\{a[1\,2\,3]\alpha_{n+1} + b[1\,2\,3]\beta_{n+1} + c[1\,2\,3]\gamma_{n+1}$$
$$+ a(1\,2\,3)\lambda_{n+1} + b(1\,2\,3)\mu_{n+1} + c(1\,2\,3)\nu_{n+1}\}$$
$$- c_{n+1}\sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_n[1\,2\,3\,4] + \dots$$
$$- s_{n+1}\sum{}' s_1 s_2 c_3 c_4 c_5 \dots c_n\{a[1\,2]\alpha_{n+1} + b[1\,2]\beta_{n+1} + c[1\,2]\gamma_{n+1} +$$

$$+a(1\,2)\lambda_{n+1}+b(1\,2)\mu_{n+1}+c(1\,2)\nu_{n+1}\}-c_{n+1}\sum s_1s_2s_3c_4\ldots c_n[1\,2\,3]$$
$$+s_{n+1}\sum{}'s_1\ldots s_4c_5\ldots c_n\{a[1\,2\,3\,4]\alpha_{n+1}+b[1\,2\,3\,4]\beta_{n+1}$$
$$+c[1\,2\,3\,4]\gamma_{n+1}+a(1\,2\,3\,4)\lambda_{n+1}+b(1\,2\,3\,4)\mu_{n+1}+c(1\,2\,3\,4)\nu_{n+1}\}$$
$$+c_{n+1}\sum s_1s_2s_3s_4s_5c_6\ldots c_n[1\,2\,3\,4\,5]-\ldots$$
$$\pm s_1\ldots s_{n+1}\{a[1\ldots n]\alpha_{n+1}+b[1\ldots n]\beta_{n+1}+c[1\ldots n]\gamma_{n+1}$$
$$+a(1\ldots n)\lambda_{n+1}+b(1\ldots n)\mu_{n+1}+c(1\ldots n)\nu_{n+1}\}$$
$$\pm s_1\ldots s_nc_{n+1}[1\,2\ldots n],$$

ossia finalmente, tenendo presente la (II):

$$\tau'\operatorname{sen}\omega'=\sum s_1s_2c_3\ldots c_{n+1}[1\,2]-\sum s_1s_2s_3s_4c_5\ldots c_{n+1}[1\,2\,3\,4]+\ldots$$
$$-\sum s_1s_2s_3c_4\ldots c_{n+1}[1\,2\,3]+\sum s_1s_2\ldots s_5c_6\ldots c_{n+1}[1\,2\,3\,4\,5]-\ldots$$
$$\pm s_1s_2\ldots s_{n+1}[1\,2\ldots n+1].$$

Parimente:

$$\lambda'\operatorname{sen}\omega'+\tau'\alpha'\cos\omega'=c_{n+1}s\lambda+s_{n+1}\lambda_{n+1}c$$
$$-\{(\beta\nu_{n+1}-\beta_{n+1}\nu)-(\gamma\mu_{n+1}-\mu\gamma_{n+1})\}ss_{n+1}$$
$$+\tau\{\alpha cc_{n+1}-s\alpha_{n+1}s_{n+1}+cs_{n+1}(\beta_{n+1}\gamma-\beta\gamma_{n+1})\},$$

ossia:

$$\lambda'\operatorname{sen}\omega'+\tau'\alpha'\cos\omega'=c_{n+1}(\lambda s+\tau\alpha c)+s_{n+1}\beta_{n+1}(\nu s+\tau\gamma c)-s_{n+1}\gamma_{n+1}(\mu s+\tau\beta c)$$
$$-s_{n+1}\nu_{n+1}\beta s+s_{n+1}\mu_{n+1}\gamma s-\alpha_{n+1}s_{n+1}\tau s+s_{n+1}\lambda_{n+1}c.$$

Sostituendo come avanti e sommando convenientemente si ha:

$$\lambda'\operatorname{sen}\omega+\tau'\alpha'\cos\omega'=\sum s_1c_2\ldots c_{n+1}a[1]+c_1c_2\ldots c_ns_{n+1}\lambda_{n+1}$$
$$-\sum{}'s_1s_2c_3\ldots c_ns_{n+1}\{[1\,2]\alpha_{n+1}+c[1\,2]\beta_{n+1}-b[1\,2]\gamma_{n+1}$$
$$+(1\,2)\lambda_{n+1}+c(1\,2)\mu_{n+1}-b(1\,2)\nu_{n+1}\}-\sum{}'s_1s_2s_3c_4\ldots c_{n+1}a[1\,2\,3]+\ldots$$
$$+\sum{}'s_1c_2\ldots c_ns_{n+1}\{b[1]\gamma_{n+1}-c[1]\beta_{n+1}+b(1)\nu_{n+1}-c(1)\mu_{n+1}\}$$
$$-\sum{}'s_1s_2c_3\ldots c_{n+1}a[1\,2]$$
$$+\sum{}'s_1s_2s_3c_4\ldots c_ns_{n+1}\{[1\,2\,3]\alpha_{n+1}+b[1\,2\,3]\gamma_{n+1}-c[1\,2\,3]\beta_{n+1}$$
$$+(1\,2\,3)\lambda_{n+1}+b(1\,2\,3)\nu_{n+1}-c(1\,2\,3)\mu_{n+1}\}$$
$$+\sum{}'s_1s_2s_3s_4c_5\ldots c_{n+1}a[1\,2\,3\,4]-\ldots$$
$$\mp s_1s_2\ldots s_{n+1}\{[1\,2\ldots n]\alpha_{n+1}\mp b[1\,2\ldots n]\gamma_{n+1}\pm c[1\,2\ldots n]\beta_{n+1}$$
$$+\lambda_{n+1}(1\,2\ldots n)\mp b(1\,2\ldots n)\nu_{n+1}\pm c(1\,2\ldots n)\mu_{n+1}\}$$
$$\mp s_1s_2s_3\ldots s_nc_{n+1}a[1\,2\ldots n];$$

ossia finalmente, tenendo presente le formole (III) e (IV), ed osser-

vando che

$$b[1]\gamma_{n+1} - c[1]\beta_{n+1} + b(1)\nu_{n+1} - c(1)\mu_{n+1}$$
$$= [1]\alpha_{n+1} + b[1]\gamma_{n+1} - c[1]\beta_{n+1} + (1)\lambda_{n+1} + b(1)\nu_{n+1} - c(1)\mu_{n+1},$$

perchè $[1]\alpha_{n+1}$ e $(1)\lambda_{n+1}$ non hanno alcuno significato, otteniamo:

$$\lambda' \operatorname{sen}\omega' + \tau'\alpha'\cos\omega' = \sum s_1 c_2 \ldots c_{n+1} a[1] - \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \ldots c_n s_{n+1} a[1\,2\,3] + \ldots$$
$$- \sum s_1 s_2 c_3 \ldots c_{n+1}[1\,2] + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \ldots c_{n+1} a[1\,2\,3\,4] - \ldots \mp s_1 \ldots s_{n+1} a[1\,2 \ldots n+1].$$

E così il teorema rimane completamente dimostrato.

Colle formole e coi metodi precedenti è ancora facilissima la composizione di n moti elicoidale $2\tau_r$, $2\omega_r(\alpha_r \ldots \nu_r)$, $(r = 1, 2, \ldots n)$.

Cefalù, maggio 1900.

MATTIA PUGLISI.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES FONCTIONS RÉELLES, DONNÉES SUR UN ENSEMBLE QUELCONQUE DE POINTS.

Par M. E. **Phragmén**, à Stockholm.

(Extrait d'une Lettre à M. G. B. Guccia).

Adunanza dell'8 luglio 1900.

. . . .

Ayant eu, par l'obligeance de M. Mittag-Leffler, l'occasion de voir, en épreuve, la Note qu'il publie en ce moment dans ces « Rendiconti », j'ai mis sur le papier une petite addition à ce qu'il y dit au sujet des fonctions de plusieurs variables.

Évidemment, le théorème général sur la représentation analytique des fonctions continues doit porter sur les fonctions définies dans un ensemble quelconque de points. Or on réduit immédiatement, comme d'ailleurs M. Picard l'a déjà fait remarquer, ce problème à l'autre, plus élémentaire, où la fonction est donnée et continue dans un domaine de la forme $a \leqq x \leqq b$, $a' \leqq y \leqq b'$ *), si on peut compléter la détermination de la fonction sur un domaine de cette dernière forme, sans faire préjudice à la continuité.

C'est là un problème qu'un de mes élèves, M. G. Setterberg, conduit par un ordre d'idées tout différent, a essayé d'approfondir, dans sa Thèse parue en suédois. Voici, avec quelques simplifications, la solution donnée par M. Setterberg.

D'abord, pour préciser la terminologie, convenons de dire qu'une fonction, déterminée en tous les points d'un certain ensemble de points appartenant à un domaine fini du plan, est *uniformément continue* dans cet

*) Nous nous limiterons au cas de deux dimensions, qui suffit pour élucider toutes les difficultés du problème.

ensemble, si, à toute quantité positive δ on peut coordonner une autre ε de manière que la différence des valeurs que prend la fonction en deux points est inférieure à δ, dès que la distance des deux points est inférieure à ε.

Nous dirons que la fonction est *continue dans l'entourage d'un certain point d'un ensemble,* si la même chose que précédemment a lieu, l'un des deux points étant le point donné.

Cela posé, on sait qu'une fonction, qui est continue dans l'entourage de tous les points d'un ensemble *fermé,* est nécessairement uniformément continue dans cet ensemble; et c'est à cause de ce théorème-ci que l'expression *uniformément continue* est presque inusitée quand il s'agit des ensembles fermés.

On sait encore qu'une fonction, qui est *uniformément continue* dans un ensemble quelconque de points, peut toujours être complétée, et d'une seule manière, de sorte qu'elle reste continue dans l'ensemble qu'on obtient en adjoignant à l'ensemble donné tous ses points limites.

Ces préliminaires établis, le théorème que nous voulons démontrer s'énonce en ces termes:

Soit E un ensemble quelconque de points contenu dans un carré C, et soit φ une fonction déterminée aux points de E et uniformément continue dans E. Il est toujours possible de définir dans C une fonction Φ qui est égale à φ en tous les points de E et qui est continue dans C.

Pour la démonstration, nous introduirons l'ensemble fermé F, qu'on obtient de l'ensemble E en y adjoignant tous ses points limites, et nous compléterons d'abord la fonction φ de manière qu'elle devienne continue sur F, ce qui, comme nous venons de le dire, ne peut se faire que d'une seule manière.

Nous diviserons, à l'aide de droites parallèles aux deux paires de côtés du carré C, ce carré en quatre parties égales que nous nommerons dans la suite « carrés du 1^{er} ordre ». Ceux de ces carrés qui ne contiennent, ni à l'intérieur ni sur le contour, aucun point de l'ensemble F, nous les mettrons de côté, pour former avec eux, et d'autres carrés analogues, un ensemble Q.

Les autres carrés du 1^{er} ordre — ceux qui contiennent des points de F — seront divisés de nouveau, chacun en quatre carrés égaux, « carrés du 2^e ordre », et nous adjoindrons à l'ensemble Q tous ceux de ces nouveaux carrés qui ne contiennent, ni à l'intérieur ni sur le contour, aucun point de F.

On imagine ce procédé continué indéfiniment de la même manière.

Envisageons maintenant l'ensemble S formé avec tous les sommets des carrés appartenant à l'ensemble Q. Il est évident que l'ensemble dérivé de l'ensemble S est formé par tous les points de l'ensemble F, qui sont situés à la limite de cet ensemble. Désignons cet ensemble dérivé par T.

Nous résoudrons le problème que nous nous sommes proposé en déterminant la fonction Φ d'abord sur l'ensemble S.

Puisque les points de S ne font pas partie de l'ensemble F, il est évident que tout point de S est sommet de quatre carrés différents faisant partie de Q. Ces quatre carrés étant en général de différent ordre, soit r le plus grand ordre qui est représenté au point que nous considérons; nous dirons pour abréger que ce point lui-même est du r^{me} ordre.

Si nous envisageons un carré qui a la même orientation par rapport au point considéré que le carré adjacent d'ordre maximum r (ou que l'un d'eux, s'il y en a plusieurs) et dont le côté est le double du côté de celui-ci, ce carré contient nécessairement, à l'intérieur ou sur le contour, des points de l'ensemble. En effet, sans cela, il ne contiendrait non plus de point de l'ensemble F et alors ce carré d'ordre $(r-1)^{me}$ aurait été adjoint à l'ensemble Q lors de la $(r-1)^{me}$ opération, et n'aurait pas été divisé en des carrés de l'ordre r.

En ces points de l'ensemble T, les valeurs de la fonction φ, complétée comme nous l'avons dit ci-dessus, sont comprises entre une limite inférieure et une limite supérieure. Nous pouvons fixer arbitrairement la valeur de la fonction Φ au point considéré, avec cette seule condition qu'elle doit être comprise entre ces mêmes limites.

La fonction Φ que nous avons ainsi définie aux points de l'ensemble S (et que nous désignerons, quand il faut distinguer, par Φ_S) est uniformément continue dans cet ensemble.

En effet, soient P_1 et P_2 deux points quelconques de S, d'ordre r_1 et r_2 respectivement.

Désignons la distance de ces deux points par η, et les projections, prises positivement, de cette distance sur les directions fondamentales de notre système de carrés, par η' et η''. Désignons de plus le côté d'un carré du r^{me} ordre par a_r, de manière que $a_r = \frac{a_0}{2^r}$; on aura

$$\text{ou} \quad a_{r_1} \leqq \eta' \quad \text{ou} \quad a_{r_1} \leqq \eta'',$$

et de même

$$\text{ou} \quad a_{r_2} \leqq \eta' \quad \text{ou} \quad a_{r_2} \leqq \eta''.$$

En effet, un carré d'ordre r_1 avec un sommet au point P_1 ne peut pas contenir le point P_2 à son intérieur, et vice versa.

Par conséquent

$$(1) \qquad a_{r_1} \leqq \eta, \quad a_{r_2} \leqq \eta.$$

Envisageons maintenant les points de l'ensemble F, qui, comme nous l'avons montré, sont situés sur un carré d'ordre $r_1 - 1$ contigu au point P_1 et ceux qui sont situés sur un carré d'ordre $r_2 - 1$ contigu au point P_2. On peut choisir deux de ces points, un de chacune des deux catégories nommées, tels que la différence des valeurs correspondantes de la fonction φ soit supérieure à la différence des valeurs de la fonction Φ aux points P_1 et P_2.

Soit ζ la distance de ces deux points, et soient ζ' et ζ'' les projections de cette distance. On aura

$$(2) \qquad \begin{cases} \zeta' \leqq \eta' + a_{r_1-1} + a_{r_2-1}, \\ \zeta'' \leqq \eta'' + a_{r_1-1} + a_{r_2-1}. \end{cases}$$

Combinant avec les inégalités (1) et remarquant que

$$a_{r_1-1} = 2\, a_{r_1},$$

$$a_{r_2-1} = 2\, a_{r_2},$$

on obtient

$$\zeta' \leqq 5\eta, \quad \zeta'' \leqq 5\eta,$$

et par conséquent

$$\zeta \leqq 5\sqrt{2}\,.\,\eta.$$

Soit maintenant ε une quantité positive arbitraire. Choisissons (ce qui est toujours possible, puisque la fonction φ est supposée uniformément continue dans l'ensemble E) la quantité positive δ de telle manière que la différence entre deux valeurs de φ soit inférieure à ε dès que les points correspondants sont distants de moins de δ.

Alors la différence de deux valeurs de la fonction φ complétée sur l'ensemble F (et *a fortiori* sur l'ensemble T) sera encore inférieure ou égale à ε, dès que les points correspondants seront distants de moins de δ.

Par conséquent la différence des valeurs de la fonction Φ aux points P_1 et P_2 est inférieure ou égale à ε, dès que $\zeta < \delta$, donc dès que η, qui signifie la distance des deux points, est inférieure à $\dfrac{\delta}{5\sqrt{2}}$.

Il est donc démontré que la fonction Φ est uniformément continue dans l'ensemble S.

Il s'ensuit des mêmes considérations que la fonction Φ reste continue dans l'ensemble $S + T$ si on lui donne aux points de T les valeurs de la fonction φ complétée sur F.

Complétons maintenant cette fonction, d'abord sur les contours de tous les carrés faisant partie de l'ensemble Q, en la faisant varier linéairement entre deux points voisins de l'ensemble S. Puis complétons-la à l'intérieur des carrés à l'aide d'une fonction harmonique prenant sur le contour les valeurs ainsi déterminées.

La fonction ainsi complétée conserve, pour tout carré de l'ensemble Q, les mêmes limites inférieure et supérieure de ses valeurs, qu'avant le complètement.

Enfin, aux points de F, nous ferons la fonction Φ égale à la fonction φ complétée.

Notre fonction Φ est maintenant déterminée en tous les points du carré C.

Elle est continue dans ce domaine.

Nous démontrons en effet aisément qu'elle est continue dans l'entourage de tout point de ce domaine.

Un point de C peut être, en effet, rapporté à l'une des quatre catégories suivantes:

Ou il est situé à l'intérieur d'un des carrés de l'ensemble Q. Dans ce cas nous savons par définition que la fonction Φ est continue dans l'entourage du point.

Ou bien, il est situé sur le contour d'un tel carré. Dans ce cas nous pouvons diviser l'entourage du point en deux ou en quatre parties appartenant à des carrés différents, et en chacune de ces parties, y compris les lignes de démarcation, la fonction est continue.

Ou bien, notre point peut appartenir à l'ensemble T. Dans ce cas, si nous prenons un entourage de ce point limité par deux paires rectangulaires de droites parallèles figurant dans la division du carré C que nous avons entreprise, et que nous envisagions séparément la partie de cet entourage qui est extérieure et celle qui est intérieure à l'ensemble F, l'oscillation de la fonction définitive Φ dans la première partie de cet entourage est égale à l'oscillation de la fonction intermédiaire que nous désignons par Φ_{S+T} et qui est définie seulement aux points des ensem-

bles S et T réunis. Dans la seconde partie de l'entourage, qui d'ailleurs peut manquer, la fonction Φ est égale à la fonction φ_F.

Or, les fonctions Φ_{S+T} et φ_F sont toutes les deux continues. Donc la fonction Φ est aussi continue dans l'entourage d'un point de l'ensemble T.

Enfin notre point peut être situé à l'intérieur de l'ensemble F. Dans ce cas, on a, dans l'entourage du point, $\Phi = \varphi_F$, ce qui est une fonction continue.

Notre fonction Φ est donc continue dans l'entourage de tout point du carré C, et, comme elle est égale à la fonction φ aux points de l'ensemble E, c'est précisément une fonction telle que nous la cherchons.

Stockholm, 3 juillet 1900.

E. PHRAGMÉN.

FRANCESCO BRIOSCHI.

COMMEMORAZIONE

per

Eugenio Beltrami
Presidente della R. Accademia dei Lincei.

Dagli *Atti della R. Accademia dei Lincei,* anno CCXCV, 1898. — Rendiconto dell'Adunanza solenne del 12 giugno 1898, onorata dalla presenza delle LL. MM. il Re e la Regina.

. . . .

Il lutto da cui fu colpita questa nostra Accademia, il 13 dicembre 1897, colla perdita del suo venerato presidente Brioschi, non fu soltanto lutto di colleghi a lui legati da antica e devota amicizia, nè di studiosi avvezzi a meditare e ad ammirare le opere del maestro, ma fu lutto universale e profondo della scienza e del pensiero nazionale.

Mi è di grande conforto riportare qui subito, in prova di quanto affermo, alcune delle parole dette in commemorazione di lui, davanti all'Accademia delle scienze di Parigi, dal principe dei geometri francesi, dall'illustre Hermite: « La carriera percorsa dal nostro eminente con- « fratello », così l'Hermite, « è stata una delle più onorevolmente ope- « rose di cui rammenti la storia scientifica del tempo nostro. Per quasi « mezzo secolo i suoi lavori si succedettero senza interruzione in ogni « ramo della scienza matematica, lasciando ovunque l'impronta indelebile « della sua gagliarda genialità. Al primo aprirsi di questa splendida car- « riera, quando siffatti studî, poco coltivati in Italia, non avevano altro « organo che il giornale romano di Tortolini, Brioschi vi inserì « lavori che lo rivelarono di botto geometra di prim'ordine. Queste pub- « blicazioni gli valsero il raro ed invidiabile vanto di dare un impulso « potente alla scienza matematica del suo paese. Per l'influsso di lui, essa « prese il posto che le spettava e fece bella mostra di sè negli Annali « di matematica da lui diretti e recati ben presto all'altezza delle più co- « spicue pubblicazioni periodiche di Francia, di Germania e d'Inghilterra.

« La vita scientifica di lui divenne così un esempio pei suoi discepoli e « la stima universale che circondò il suo nome valse d'incoraggiamento « a quelli che ne seguirono le orme; egli ha meritato che l'Italia si pro- « fessi riconoscente a lui dell'illustrazione ch'essa ora riceve dalle sue « scuole matematiche ».

Queste nobili parole rispecchiano nel modo più esatto e più degno l'opera indefessa data agli studî italiani dal nostro lacrimato Collega. La tendenza della quale ha tanta affinità, anzi medesimezza, con quella cui deve anzitutto inspirarsi l'attività d'un'Accademia nazionale qual'è la nostra (per adempiere ai fini onde se ne legittima l'esistenza), che è doppiamente doveroso per noi consacrare pubblicamente la memoria di chi seppe, in tempi infelici e per sola virtù propria, preparare così bene il terreno che noi siamo ora chiamati a fecondare con tutti gli aiuti che può dare un Governo nazionale, conscio dei bisogni intellettuali della moderna società.

Francesco Brioschi nacque a Milano il 22 dicembre 1824 ed ottenne a Pavia la laurea dottorale nel 1845, dopo di che si diede in patria al tirocinio pratico allora prescritto per l'esercizio della professione d'ingegnere. Ma gli studî matematici fatti a Pavia sotto la guida dell'illustre Bordoni lo avevano vivamente appassionato per la scienza pura e per le sue applicazioni fisiche e meccaniche, e l'assistenza illuminata ed affettuosa d'un benemerito patrizio milanese, del valente ed erudito geometra Gabrio Piola, valse grandemente a mantenerlo e ad infervorarlo in codesta sua propensione agli alti studî. I tempi volgevano allora assai tristi per tutti, ma specialmente per chi aspirava a coltivare le scienze. L'insegnamento teorico era in generale monco e poco profondo e la parte applicativa ridotta ai rudimenti bastevoli solo per le più meschine esigenze del tecnicismo. Fortunatamente Brioschi aveva trovato in Bordoni un eccellente istitutore nell'analisi generale ed in Piola un non meno eccellente introduttore in quelle grandiose applicazioni che ne erano state fatte da Lagrange, da Fourier, da Poisson e da Cauchy, talchè gli fu facile, mercè le doti ammirande del suo ingegno e, prima fra tutte, mercè quella sua straordinaria facoltà d'assimilazione rapida e profonda, mettersi in breve nel pieno possesso dell'amplissimo dominio conquistato agli studî fisico-matematici da quegli illustri campioni della scienza italiana e francese.

Senonchè un felice istinto lo avvertì che neppur questo dominio bastava a rappresentare tutta la scienza del suo tempo e lo spinse ad

allargare la cerchia delle fonti, estendendola alla produzione recente delle altre nazioni più progredite, massimamente della Germania e dell'Inghilterra. Ed in ciò fu veramente ed altamente benemerito della cultura italiana, giacchè allora e sempre, colla parola e coll'esempio, non cessò mai d'instillare nei giovani il sentimento della necessità d'una larga base di studî, sentimento che ora ha messo, mercè sua, radici salde ed incrollabili fra noi e che ha creato una fecondissima corrente di solidarietà fra la produzione scientifica italiana e quella di tutto il mondo civile.

Così agguerrito di larghi e forti studî, così bene orientato nel vastissimo campo delle ricerche che occupavano, verso la metà del nostro secolo, i più valorosi matematici d'Europa, egli si trovò chiamato ad insegnare meccanica nell'Università di Pavia e diede tantosto inizio ad una smisurata attività scientifica, che durò quanto la sua vita e che segnò un'era di gloriosissimo risveglio per le scienze esatte in Italia

Dare un'analisi, anche sommaria, di codesta sua così svariata ed esuberante produzione sarebbe cosa non solo disadatta al luogo ed alla circostanza, ma superiore alle mie forze. Epperò non potrò che passare in rapidissima e stringatissima rassegna l'opera sua di scienziato, per quel tanto solo che basti a delinearne le impronte ed i caratteri generali; chiedendo venia se malgrado il desiderio, in me vivissimo, di ridurre allo stretto necessario questo indispensabile richiamo, non mi riuscirà di cansare per brev'ora il tedio pur troppo inerente alla natura astrusa dei soggetti ed alla stessa asperità del linguaggio d'inevitabile uso.

Le pubblicazioni scientifiche di Brioschi ascendono a un bel circa al numero di 250, da quelle di più decine ed anche di centinaia di pagine in 4° a quelle di mole e di formato minore. Per la più gran parte, anzi ad eccezione di pochissime (concernenti specialmente l'idraulica pratica), esse riguardano unicamente la matematica pura, che vi è rappresentata può dirsi in tutti i suoi rami più culminanti. Non è sempre facile classificare questi scritti, parecchi dei quali, per una tendenza in essi abbastanza frequente e di cui dirò in appresso, toccano ad un tempo disparatissimi argomenti; ma distribuendoli un po' sommariamente e per cifre tonde si può dire che l'Algebra superiore vi è rappresentata da 90 lavori, la teoria delle equazioni differenziali da 30, quella delle funzioni ellittiche da 40, delle abeliane da 30, la geometria analitica e differenziale da 30, la meccanica analitica ed il calcolo delle variazioni da 15.

In ordine di tempo furono questi ultimi i soggetti che attirarono

più presto l'attenzione di Brioschi, se si prescinde da un lavoro giovanile sulla dottrina della propagazione del calore, che era già uscito in luce nel 1847, due anni, cioè, dopo ch'egli aveva conseguito la laurea dottorale e 50 anni giusti prima della sua morte. La scomparsa allora recente del grande Jacobi, col quale egli aveva tanta affinità di temperamento scientifico, richiamava l'attenzione dei geometri sul grande problema delle equazioni dinamiche e della loro integrazione, e questo argomento si collegava d'altronde intimamente col corso che nel 1850 egli era stato chiamato ad impartire nell'Università di Pavia. Il Brioschi si rivelò ben presto analista valorosissimo coi suoi lavori sul problema d'integrazione, come sulle affini teorie delle equazioni a derivate parziali e delle equazioni isoperimetriche; nè lasciò di ritornare, anche assai più tardi, su quest'ordine di studi, coi bei lavori sull'ellissoide fluido di Dirichlet e sul problema dei tre corpi.

Anche gli studi geometrici di Brioschi datano dai primi anni della sua carriera scientifica e non cessarono mai di occuparlo in seguito, nel duplice indirizzo della geometria cosidetta differenziale e della geometria pura ed analitica. Nel primo di questi due indirizzi egli prese le mosse principalmente da una famosa Memoria di Gauss, che era passata per lungo tempo quasi inosservata, ma di cui allora s'incominciava ad intravedere la straordinaria importanza. Ebbe parte grandissima nello svolgimento del tutto nuovo, e divenuto poi sempre più ampio e più svariato, che ne trasse la teoria delle superficie ed a questa arrecò molteplici ed essenziali contributi. Agli studi di pura geometria s'iniziò sulla classica opera, recentissima allora, di Michele Chasles, ma seguendo l'indole peculiare del suo ingegno, che lo chiamava di preferenza alle ricerche algoritmiche, si rivolse ben presto alle questioni di geometria analitica intesa in senso lato, cioè svolta col sussidio così delle funzioni algebriche, come delle trascendenti, e fu felicissimo nella trattazione d'importanti e difficili problemi della geometria algebrica e specialmente di quelli in cui la geometria e l'analisi gareggiano insieme nel raggiungere, per diversissime vie, una stessa mèta.

Ma l'indirizzo in cui Brioschi si slanciò con vera passione e con istraordinario successo, dai primi fino agli ultimi anni della sua lunga carriera di professore e di scienziato, fu quello delle ricerche sulla teoria delle equazioni e sulle nuove dottrine dei determinanti, degli invarianti, dei covarianti e delle forme algebriche. Basterebbe già il classico libro dei

Determinanti, che risale ai primissimi anni della sua vita scientifica e che fu tradotto in quasi tutte le lingue culte, per constatare le eminenti sue doti d'assimilazione e d'invenzione, come il profondo e sicuro possesso d'ogni più disparato dominio dello scibile matematico. Ma la lunghissima serie dei lavori algebrici che tennero dietro a questo primo saggio, già bastato a rendere popolare il suo nome, costituisce una vera epopea matematica, nella quale egli gareggiò costantemente con Sylvester e con Cayley, da un lato, nell'erigere la colossale teoria delle forme, e con Hermite e Kronecker, dall'altro, nell'aprire alla secolare dottrina delle equazioni algebriche quei nuovi e mirabili varchi, che ebbero la lor prima radice nella memorabile scoperta della soluzione dell'equazione di 5° grado.

Un altro larghissimo ed elevatissimo campo di studî verso i quali, non meno che verso i precedenti, il Brioschi si trovò subito attratto dalle sue peculiari attitudini e predilezioni scientifiche, e che del resto si collegava necessariamente ed intimamente coll'ultimo dei dianzi accennati, fu quello delle funzioni trascendenti, ellittiche ed abeliane, inaugurato da Eulero e da Legendre e recato d'un tratto a smisurate altezze dai lavori di Abel, di Jacobi e da quelli, allora recentissimi, di Weierstrass. Qui forse più che altrove la materia prestavasi mirabilmente a quel suo genio, omai maturo, di analista supremamente classico, e qui era egli già entrato gloriosamente nell'arringo, mettendosi d'un subito in prima linea coi valorosissimi, quando i fortunati eventi del 1859 lo sospinsero d'un tratto a svolgere in altri campi e sotto altre forme le forze esuberanti del suo ingegno, chiudendo così quello che ben può dirsi il periodo eroico della sua operosità scientifica.

Il qual periodo non durò più che un decennio, ma bastò a circondare per sempre il suo nome d'un'aureola di gloria purissima, così presso di noi come presso tutte le nazioni ove è in onore la scienza e la ricerca incessante del vero. Senonchè, anche in tutto il tempo di poi e frammezzo alle più gravi ed assorbenti cure politiche ed amministrative, frammezzo alle più stringenti e dolorose ansietà di intraprese non sempre fortunate, egli non cessò mai di tener fiso amorosamente lo sguardo nella scienza prediletta, così da favorirne in tutti i modi la diffusione ed il progresso nel nostro paese, molto aggiungendo coll'opera sua propria al moltissimo già prodotto e mantenendo fama indiscussa di geometra di primissimo ordine. Fino all'ultimo suo giorno mai non lasciò di lavorare

per la scienza, talchè lo vediamo presentare una sua sottile disquisizione analitica al Congresso internazionale dei matematici tenuto lo scorso anno a Zurigo ed anche dopo la sua morte apprendiamo che stava già da tempo componendo un volume in 4° sulle funzioni iperellittiche, di cui dava a stampare i fogli man mano che gli veniva fatto di condurne a buon termine la redazione e giungendo così fino al tredicesimo foglio. Nè ancora sappiamo se di questo cospicuo lavoro, che penetra, senza quasi alcun preliminare, nei più reconditi recessi d'una difficilissima e modernissima dottrina, non restino per gran ventura altri materiali già elaborati ed atti alla stampa, fra i manoscritti lasciati dall'autore *).

E dopo questa rapidissima rassegna dell'eredità intellettuale di Francesco Brioschi, rassegna affatto inadeguata pur troppo alla sua straordinaria ricchezza, ma che qui non mi sarebbe stato lecito (se pur mi fosse stato possibile) spingere a maggior copia di particolari, si desidererà forse sapere, da tutte quelle culte e gentili persone che, senza professare gli studi esatti, vorrebbero pur farsi un più preciso concetto d'un autore così celebrato e che ha lasciato di sè un'orma così profonda nelle menti dei dotti e nei cuori degli allievi e dei colleghi, si desidererà, dico, sapere qual fosse l'indole intrinseca e propria del pensiero e dell'opera del nostro compianto Presidente.

Vi è in primo luogo un carattere peculiare che domina in ogni suo scritto e che, sebbene tocchi soltanto il lato tecnico ed esteriore della sua attività di ricercatore, si collega nondimeno abbastanza intimamente con tutto l'indirizzo della mente di lui. Nella seconda metà di questo secolo si è andata accentuando, in matematica, una tendenza che deve forse le sue prime origini a Lagrange, che fu incoraggiata dai metodi di Gauss e di Dirichlet, ma che ricevette il suo più ampio e decisivo svolgimento dalle speculazioni di Cauchy e di Riemann. Questa tendenza consiste nel relegare in seconda linea, riducendolo ad ufficio meramente esecutivo, l'apparato algoritmico che le nuove ricerche necessariamente

*) Qui il Beltrami era stato indotto in errore da un'inesatta informazione. I fogli giacenti presso la tipografia-editrice degli Annali di Matematica sono esclusivamente quelli delle copie a parte della Memoria *Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di primo ordine* stampata nel marzo 1887 e pubblicata nel tomo XIV (pp. 241-344) degli Annali (serie II). La Memoria doveva essere continuata, ma i materiali pel compimento o non esistettero mai o sono stati distrutti. (L. CREMONA).

conducono a sempre maggiore complicazione e nel mettere invece al posto d'onore la deduzione puramente logica, aprioristica, dei principi che devono guidare il calcolatore alle formule in cui si traduce la soluzione d'ogni determinato problema che la scienza si propone. Per tal modo queste formule, quand'anche possano apparire irte ed involute, non son più tali per chi sappia quale è il concetto primordiale onde scaturiscono e quale la serie delle logiche elaborazioni di tale concetto per cui si giunge necessariamente e, per così dire, meccanicamente alla determinazione delle formule stesse. Or bene, a questo nuovo orientamento della ricerca matematica, a cui hanno partecipato in assai diversa misura le varie scuole europee, poichè effettivamente vi influiscono in un certo grado anche le diversità etnografiche di atteggiamento intellettuale, il nostro Brioschi non ha preso parte alcuna. Egli si è sempre mantenuto fedele all'indirizzo prettamente classico, che s'impersona nei grandi nomi di Eulero e di Jacobi, versando a piene mani in ogni sua ricerca il tesoro inesauribile delle sue formule agili e penetranti e conseguendo fama indisputata d'insuperabile virtuosità nel maneggio d'ogni più raffinato strumento dell'arte analitica. Non è già che gli ripugnasse l'appello all'azione diretta del pensiero matematico, o che di questo diffidasse, o che l'uso gliene riescisse meno spontaneo e naturale; egli è che a lui mancava la ragione prima dell'abbandono dei metodi tradizionali, lo sgomento cioè delle lunghe ed intricate calcolazioni; queste furono sempre un giuoco per lui, che vedeva chiaro attraverso una selva di formule come attraverso un limpidissimo cristallo. Ed a quel modo che sotto le mani dell'abile musicista, frammezzo al vertiginoso rincorrersi delle note ed al succedersi irrequieto delle modulazioni armoniche spicca sovrana la melodia, che incede tranquilla e serena, così egli sapeva far scaturire netto e preciso il risultato analitico cui mirava da un apparato formidabile di simboli, artificioso sì, ma riboccante di eleganza e di artistica simmetria.

Questa peculiarità dello stile matematico del Brioschi non tocca tuttavia, come dicevo, che il lato tecnico della sua produzione scientifica; essa non basta ad illustrare le modalità più significanti e più riposte della sua attività intellettuale, nei rapporti di questa colla scienza pura, come con quelle molte altre manifestazioni in cui fu vista campeggiare ed imporsi la sua potente personalità. Per caratterizzare più intimamente la natura del suo ingegno io non saprei far meglio che risalire a quel bo-

nario ma sagacissimo raffronto che è fatto nei *Pensieri* di Pascal fra i due opposti indirizzi in cui suole più comunemente svolgersi l'attività delle menti umane; indirizzi i quali, se sono ben lontani dall'esaurire l'infinita varietà degli intelletti di quaggiù, rappresentano pur tuttavia due forme spiccatamente diverse della loro spontanea e normale manifestazione. Vi sono, secondo Pascal, due specie di tendenze intellettive, l'una delle quali conduce a sviscerare profondamente le conseguenze d'alcuni principî, ed è ciò che egli chiama lo spirito geometrico (o meglio, diremmo ora noi, lo spirito che informa tutte quelle scienze che si sogliono designare coll'epiteto di esatte); l'altra conduce invece a ben comprendere ad un tempo un gran numero di principî diversi, senza confonderli insieme, ed è ciò ch'egli chiama lo spirito fine. Il primo è forza e dirittura di mente, l'altro è larghezza e versatilità d'ingegno, e l'uno può stare, anzi di solito sta senza l'altro, giacchè la mente può essere forte ma unilaterale, come può essere versatile ma fiacca.

Vi è una straordinaria differenza, seguita a dire Pascal, fra i campi nei quali si esercitano queste due opposte tendenze. Nell'uno i principî sono evidenti ed incontrastabili, ma sono remoti dall'uso comune; non si ha di solito l'occasione, nè l'abito di pensare ad essi; ma se appena si considerano con qualche attenzione, si veggono per dir così di facciata e bisognerebbe avere proprio le traveggole per non ragionare dirittamente su premesse così lampanti e così massiccie da non lasciare guari possibilità di abbaglio. Nell'altro campo invece i principî sono d'uso comune, stanno davanti agli occhi di tutti, non occorrono sforzi nè lunghe ricerche per rintracciarli, basta aver buona vista: ma bisogna che questa sia buona davvero, giacchè essi sono in così gran numero ed appaiono così sottili e così sfumati che è quasi impossibile che alcuno non passi inosservato. Ora basta negligerne un solo per cadere nell'errore, laonde non solo bisogna che l'occhio sia ben acuto per ravvisarli tutti, ma bisogna poi anche che il raziocinio sia ben saldo per non incespicare nelle deduzioni che se ne devono trarre.

E qui Pascal analizza sottilmente ed un cotal poco anche umoristicamente le diverse attitudini mentali che presiedono all'una od all'altra tendenza ed i diversi metodi di ragionamento che si rendono abituali nell'esercizio dell'una o dell'altra, per concluderne essere sommamente raro che i geometri sieno fini ed i fini geometri, poichè i primi vorrebbero procedere metodicamente per definizioni e deduzioni là dove la ma-

teria non si presta affatto a ciò, ed i secondi, avvezzi a giudicare per intuito, restano così stupefatti e disorientati quando si trovano di fronte ad enunciazioni insolite ed a considerazioni aridamente precise, che ne rifuggono ben presto svogliati e stanchi.

Ora questo così raro accoppiamento di due tanto opposte e tanto preziose facoltà si trovò per l'appunto mirabilmente attuato, per felice disposizione di natura e per assiduo esercizio di volontà, nella mente del nostro Brioschi, del quale si può dir quindi con tutta esattezza, usando il linguaggio di Pascal, che fu davvero un geometra fine.

Esplicata nel campo stesso della scienza pura, questa finezza, cioè, secondo la riportata definizione, questa facoltà di ben comprendere ad un tempo molti principî diversi senza confonderli fra loro, gli ha servito ad impadronirsi rapidamente e profondamente di quasi tutte le parti della scienza, così da non restarne alcuna in cui non fosse considerato maestro e da moltiplicare talmente i contatti fecondi dell'opera sua propria con quella di quasi tutti gli analisti contemporanei da conseguire un grado eccezionale di notorietà e quasi direi di popolarità, nel più eletto senso della parola e nella più ampia cerchia di studî e di studiosi. Ma sopratutto questa sua finezza gli valse mirabilmente a cogliere un'infinità di rapporti, non prima sospettati, fra disparatissimi capitoli della scienza ed a far convergere imprevedutamente sopra una questione faticosamente discussa dagli specialisti una luce vivissima, irradiante da conoscenze a da concetti d'un ordine che si sarebbe dovuto credere interamente diverso. Della qual segnalata e caratteristica attitudine, che concorre a rendere men facile, come dicevo, la classificazione dei numerosi suoi scritti, è esempio splendido la vittoriosa sua comparsa sull'arduo campo delle equazioni di 5° grado.

Esercitata invece sul terreno delle scienze applicate questa medesima finezza permise a Brioschi di penetrare senza sforzo, e quasi di primo acchito, nell'indole propria di queste scienze, per l'appunto, anzi più specialmente in ciò ch'esse hanno di essenzialmente disforme, e quasi di repugnante, dall'indirizzo geometrico puro. Così avvenne per esempio nell'idraulica, dove, fin dai primi anni della sua carriera scientifica, dando alla luce una Memoria postuma del suo maestro Piola, egli condensò nella dottissima prefazione che ad essa premise una diligentissima storia critica delle ricerche fatte in Italia, nella prima metà di questo secolo, intorno al moto delle acque: storia che brilla per maturità e sicurezza

di vedute in una parte così difficile, così complessa e diciam pure così controversa della scienza applicata. E riprendendo più tardi, con intenti più direttamente applicativi e con larghissima e ragionata conoscenza di quanto si era andato accumulando, in fatto di esperienze idrauliche, in ogni parte d'Europa e nell'America del nord, recò nella materia, insieme colla consueta abilità dell'analista e del calcolatore, tutti gli avvedimenti d'un osservatore acutissimo, d'un tecnico consumato e perfino d'un vero e proprio esperimentatore, dettando i programmi e le norme di apprezzatissime operazioni idrometriche (di cui i tecnici vivamente desiderano veder pubblicata la Relazione), suggerendo l'uso di appropriate formule empiriche per la portata dei fiumi, prendendo parte in persona a laboriose misure idrometriche e lasciando insomma fama d'idraulico non impari ai molti preclari che si succedettero, in serie più che secolare, nella gloriosa nostra storia scientifica.

Ed a questa stessa versatilità di mente devesi principalmente ascrivere la partecipazione vivissima ed altamente meritoria che Brioschi ebbe nel nuovo organismo dell'alto insegnamento tecnico fra noi. Presso un popolo nel quale, come forse in tutte le razze latine, l'idealità scientifica non ha culto intimo ed universale, ma è solo apprezzata dai più in quanto porge sostegno ed alimento alle finalità professionali, e nel quale d'altronde il tecnicismo era, all'epoca della nostra resurrezione politica, decisamente inferiore a qualunque possibilità di competizione colle energie straniere, Brioschi afferrò rapidamente il concetto di rialzare le sorti industriali ed economiche del paese, dando al tempo stesso una giustificazione indiretta ma stringente del culto dovuto alla scienza pura. Ma se tale veduta era degna dell'uomo e del momento, non meno mirabile fu la chiarezza e l'aggiustatezza dei concetti che presiedettero all'esecuzione, in ispecie col riconoscimento di quella profonda diversità di metodi che doveva regnare nell'insegnamento delle scienze esatte se impartito con intenti applicativi e di quella necessaria e continua mobilità di studì e di ordinamenti che doveva costantemente accompagnare, e talvolta precorrere, le sempre mutabili esigenze della vita industriale. I titoli amplissimi di Brioschi alla riconoscenza nazionale per quest'opera sua sono stati diffusamente esposti ed illustrati dai non pochi biografi che mi hanno preceduto ed in ispecial modo dal più competente e dal più benemerito dei collaboratori di lui, dal nostro collega onorevole Colombo, che mi ebbe a condiscepolo nelle indimenticabili lezioni di meccanica date

già a Pavia dal compianto maestro. E la stessa grandezza dell'ammirazione che suscitò fra i pratici l'opera data all'insegnamento tecnico da un così squisito e purissimo geometra è la più solenne riprova di quella finezza ed agilità di pensiero che io ravvisavo quale carattere dominante nelle creazioni scientifiche di lui, come in ogni altra estrinsecazione del suo alto intelletto.

E che dire dell'incalcolabile somma di lavoro accumulato in pro' del nostro paese nell'incessante alternarsi delle funzioni che, dopo la fondazione del Politecnico di Milano, egli ebbe ad esercitare, sia come primo organizzatore dell'Istruzione pubblica, dei Lavori pubblici e dell'Agricoltura e Commercio qui in Roma nel 1870, come Presidente della Commissione per lo studio del bacino idraulico del Po, come dirigente l'inchiesta sulla situazione economica di Firenze, quella sulla Marina mercantile e la ponderosissima inchiesta ferroviaria; sia come collaboratore assiduo ed illuminato degli studi per il nuovo Catasto e per la perequazione fondiaria, come membro vigilante ed instancabile della Giunta permanente di Finanza del Senato, come analizzatore accurato di gravissime questioni tecniche, quali quelle della succursale dei Giovi e dell'acquedotto del Serino; sia finalmente, a tacere d'altre moltissime e svariatissime funzioni, come Membro preponderante del Consiglio Superiore di pubblica istruzione per un periodo di più che trent'anni, come Direttore per un non minore periodo di tempo degli *Annali di Matematica* da lui rialzati e recati ad onorevolissimo grado nella gara internazionale di divulgazione e di progresso degli alti studi matematici, e come Presidente, per quasi quattordici anni, di questa nostra Accademia di cui seppe tenere sempre alto il prestigio? Che dire finalmente della perpetua giovinezza di sua mente, talchè niun indizio di stanchezza apparve mai nei suoi più tardi lavori, niun pregiudizio di scuola, niuna riluttanza alle dottrine più originali, più ardite e più disformi dalle classiche e tradizionali?

Ma se tutti questi meriti, che basterebbero a rendere venerata e cara la memoria di molti uomini, attestano il portentoso valore intellettuale di Brioschi e quelle che il nostro illustre Vice-Presidente ben a ragione chiamò tempra adamantina d'ingegno per chiarezza, potenza di penetrazione e saldezza, non mancano davvero le testimonianze del singolar valore morale di lui, che ben potè dirsi uno strenuo campione di quella che l'Ammiraglio Saint-Bon chiamava la scuola del dovere! Lasciamo

pur stare gli aiuti costanti ed affettuosi, gli stimoli efficacissimi, gli incoraggiamenti benevoli da lui dati a studiosi d'ogni età e d'ogni materia, poichè essi fecero sì, come giustamente osservò un suo geniale biografo, che un grande conforto, un conforto ineffabile lo sostenesse sempre, la sicurezza che in lui fidava e da lui s'inspirava grandissima parte degli studiosi italiani! Lasciamo anche stare la proverbiale fermezza di lui nella tutela dell'ordine e della disciplina nel suo prediletto Istituto, nella difesa d'ogni sana tradizione didattica ed amministrativa in seno al Consiglio Superiore della pubblica Istruzione; ma udiamo quel che dice, sulla sua tomba ancora aperta, dinanzi alla più eletta cittadinanza di Milano, il rappresentante autorevole di quella città, il Sindaco Vigoni: « Carattere « franco fino alla durezza, pronto quanto reciso nei suoi giudizi, tagliente « ed inflessibile nei suoi apprezzamenti, ebbe avversari, non ebbe nemici, « poichè tutti s'inchinarono davanti all'elevatezza costante dei suoi senti« menti, alla potenza del suo ingegno, alla profondità e vastità della sua « cultura, alla sua inesauribile e feconda attività ». Ed un amico di tutta la vita lo dice « rigido pur anco nella sua rettitudine e tuttavia disposto « per ingenita bontà d'animo ad equa indulgenza ». Ed il suo più eminente collaboratore nell'Istituto aggiunge: « fermo soltanto nell'esigere la « più stretta disciplina, ma sicuro di ottenerla pur guadagnandosi la rive« renza e l'affetto degli allievi ». Che più? Questi stessi allievi che pur sapevano la sua mano di ferro, che non di rado fremevano davanti alle sue osservazioni perentorie e severe, lo chiamavano sommessamente « zio », contemperando felicemente in tal nome i concetti di maestro e di educatore, di guida e di amico, di rigidezza e di benevolenza che si associavano, nelle loro menti giovanili, al pensiero di lui e dell'azione sua *).

Quelle due tendenze di cui parla Pascal, la scrupolosa precisione geometrica e la versatile finezza dell'ingegno, alleate fra loro e trasmigrate dal terreno intellettuale al terreno morale, si sono fuse in un misto di rigidezza benevola, di disinvolta semplicità e di affabilità indulgente che disarma i rancori, trascina gli animi, e, lasciando intatta l'ammirazione, va diritto ai cuori degli uomini!

Serbiamo lunga e calda fede alla memoria di chi seppe sollevare una

*) Veggasi la Commemorazione letta dal prof. Ettore Paladini al Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Milano.

così larga e potente onda di sentimenti nobili e generosi. Auguriamo all'Italia nostra, e per essa alla Maestà del nostro Re, che al grande estinto tenne profondo e commovente affetto, di aver sempre intorno a sè, viventi ed operanti per il bene della Patria, alcune di queste grandiose figure, cui scintillano in fronte gloriosamente il genio, l'energia e la bontà!

EUGENIO BELTRAMI.

COMMEMORAZIONE

per

Luigi Cremona
Socio della R. Accademia dei Lincei.

Dagli *Atti della R. Accademia dei Lincei*, anno CCXCVII, 1900. — Rendiconto dell'Adunanza solenne del 10 giugno 1900, onorata dalla presenza delle LL. MM. il Re e la Regina.

SIRE, GRAZIOSISSIMA REGINA,

Già tre volte nel breve corso di sedici anni la R. Accademia dei Lincei fu messa in lutto per la morte del proprio Presidente: Quintino Sella, Francesco Brioschi, Eugenio Beltrami. E tutte e tre le volte il caso funesto ci colpì all'improvviso, quasi come fulmine.

Eugenio Beltrami, or sono appunto due anni, era stato da noi eletto Presidente con una votazione unanime, che a lui solo, per effetto di rara modestia, riuscì di sorpresa. Superato non senza sforzo lo sgomento dell'animo, schivo di tutto ciò che potesse distorglielo dagli studî, egli si sobbarcò ai doveri del nuovo ufficio con quella religione, che aveva inspirato gli atti di tutta la sua vita. E così seppe, in tempo assai breve, ricondurre l'amministrazione di quest'Accademia al desiderato regolare e stabile assetto. Di tale opera sua, per lui veramente insolita, noi gli dobbiamo essere profondamente grati, non solo perchè è stata utile al decoro dell'Accademia, ma anche perchè per essa egli aveva silenziosamente, o forse soltanto con intimo cruccio, e per la prima volta in sette lustri consecutivi, sacrificato gli ozî della scienza. Compiuta l'impresa, vagheggiava il ritorno alla deliziosa quiete del suo studio, se nonchè lo rodeva già una malattia misteriosa per lui e forse anche per gli stessi medici: malattia che non gli consentiva il lavoro sereno e tran-

quillo. A un tratto corse la notizia di una grave, impreveduta, operazione chirurgica, alla quale si era dovuto assoggettare; e il terzo giorno dopo di essa, il 18 febbraio a. c., Eugenio Beltrami, sempre calmo e cosciente, esalava l'anima purissima e nobilissima! Aveva di poco varcato il sessantaquattresimo anno; era nella pienezza del suo vigore intellettuale; e si sperava temporaria la diminuzione delle forze fisiche, poichè fino a pochi anni addietro, bello e fiorente d'aspetto, aveva conservato il fascino di una gioventù che pareva immune da decadenza.

Il caso fu così repentino, così insospettato, che tutti rimasero percossi da doloroso stupore. In ogni parte d'Italia e fuori, il Beltrami aveva amici e ammiratori; da per tutto si levò un grido di sincero dolore. Lo commemorarono con nobili e schiette parole: nel Senato (al quale apparteneva da soli otto mesi!), il presidente Giuseppe Saracco e l'amico fedele Ulisse Dini; alla Camera elettiva, Giuseppe Colombo; all'Istituto Lombardo, Giovanni Celoria e Carlo Somigliana; all'Istituto Veneto, Pietro Cassani; all'Accademia delle scienze di Torino, Enrico d'Ovidio; a quella di Napoli, Luigi Pinto; a quella di Bologna, Salvatore Pincherle; Alberto Tonelli a Lucca; qui in Roma Valentino Cerruti e Giovanni Frattini; Maurice Lévy all'Accademia delle scienze di Parigi. Dopo tali e tante voci, la mia tornerebbe affatto superflua, se la ricorrenza di questo giorno solenne nel quale i Lincei hanno l'altissimo onore di accogliere le Vostre Maestà, non c'imponesse il dovere di ricordare i meriti e le virtù del nostro benamato Presidente. Ma poichè le precedenti commemorazioni contengono già quanto era più importante a richiamarsi; e poichè, se per dir cose nuove mi indugiassi ad evocare le memorie di oltre quarant'anni di intima amicizia, o mi facessi ardito di entrare nell'esame minuto dei lavori scientifici del Nostro (anche solo di quelli in cui avrei minore incompetenza), io varcherei di troppo i limiti di tempo che mi sono concessi e offenderei le convenienze proprie di questa solenne tornata, così mi ristringerò quasi esclusivamente a spigolare e condensare, da ciò che già è stato detto, quelle cose che mi sembrano le più opportune ad essere ricordate nella presente occasione.

Eugenio Beltrami nacque a Cremona il 16 novembre 1835 da Eugenio B. cremonese e da Elisa Barozzi veneziana, tutt'ora vivente. Ebbe ad avo paterno Giovanni Beltrami (nato nel 1779 a

Cremona, e morto ivi nel 1854, [illegible] mecenate il Beauharnais, [illegible] divenuti celebri *).

Anche il padre, Eugenio, [illegible] miniatore, studiò prima a Bergamo [illegible] Hayez, donde passò all'Accademia di Venezia [illegible] Elisa Barozzi. Partecipò [illegible] andò al campo di re Carlo Alberto [illegible]. Dopo i disastri di quella guerra [illegible] donde più non fece ritorno [illegible].

La madre Elisa, [illegible] risale a tempi remoti, [illegible] storia della Repubblica di Venezia [illegible] colta nella musica, in cui [illegible] e conosciuta per lodate composizioni [illegible] e musicali.

Il nostro Eugenio [illegible] alla patria; fanciullo e giovinetto [illegible] terno. Frequentò le scuole elementari, ginnasiali e liceali di Cremona, salvo per un anno, 1848-49, durante [illegible] della guerra in Lombardia, avendo [illegible] Venezia ancora libera, fece la quarta grammaticale in quel Ginnasio che [illegible] nome da Marco Polo.

Andò poi all'Università di Pavia e [illegible] matematica negli anni scolastici 1853-54, 1854-55, 1855-56. Nel novembre 1853 era entrato nel Collegio Ghislieri per avervi ottenuto un posto di fondazione Castiglioni, ma nel febbraio 1855 ne fu espulso con altri, accusati di aver promosso disordini in odio al Rettore Ab. Antonio Leonardi, sui quali investigò quella maligna polizia, che fiutava complotti e ribellioni anche fra i chiassi della scolaresca.

La perdita del posto nel Collegio Ghislieri peggiorò le strettezze economiche già gravi per la morte del nonno Beltrami, il quale sinchè visse aveva provveduto alla nuora ed al nipote. Perciò a questi divenne impossibile indugiarsi all'Università e sostenervi i cosidetti *esami di rigore*

---

*) Vedi Antonio Meneghelli, *Giovanni Beltrami insigne incisore in gemme.* Padova, 1839.

che dovevano precedere la laurea dottorale; e fu costretto a troncare d'un tratto la lieta vita di studente ed a portarsi (nel novembre 1856) a Verona ad assumervi un impiego amministrativo, ottenuto per le aderenze di uno zio materno *): l'impiego cioè di segretario particolare dell'ingegnere Diday, direttore dell'esercizio delle strade ferrate del Lombardo-Veneto.

Quell'ufficio non desiderato da lui, ma accettato, come quello che gli dava i mezzi, venuti totalmente a mancare, di mantenere sè e la madre, gli tolse di attendere inoltre a studî e ad esami. E allora cominciò per il nostro Beltrami quell'esistenza di severo, inappuntabile adempimento de' proprî doveri che non si smentì mai, nemmeno per un giorno, sino alla morte.

Quelle strade ferrate erano esercitate da una Società privata, e l'ingegnere Diday, eccellente persona, ebbe sempre pel Nostro cure benevole, quasi paterne; tuttavia la polizia austriaca, sospettosa di tutto e di tutti, sospettò anche di quel giovane silenzioso e riservato i cui parenti, del resto, erano inscritti sul così detto *libro nero*. Con lettera 10 gennaio 1859 del direttore generale Busche, il Beltrami venne *per motivi politici* licenziato. Se non che, la fortuna sua si trovò d'accordo con quella d'Italia; pochi mesi dopo, il cannone di Magenta rese libera la Lombardia, e l'ingegnere Diday trasferì l'ufficio a Milano conducendo seco il suo segretario particolare.

A Milano divenne nel Nostro, irresistibile la vocazione, già presentita a Verona, verso gli studî matematici; ond'è che, vincendo l'innata modestia, egli si fece a domandare i consigli di Francesco Brioschi che aveva avuto a professore a Pavia nell'anno 1855-56, ed a cercare la compagnia di giovani già avviati negli studî e nell'insegnamento. Dotato di una coscienza limpidissima, ben rara a venticinque anni, vide in piena luce la via che poteva e doveva battere per secondare quella vocazione.

Ad un amico egli scriveva nel dicembre 1860 nei termini seguenti:

« ... Il corso universitario, io l'ho compiuto (parte per leggerezza,
« parte per quell'indolenza che accompagna ordinariamente il malanimo
« cagionato dalle frequenti avversità casalinghe) seguendo il malvezzo

*) Il comm. Nicolò Barozzi, ora direttore del Museo archeologico di Venezia.

« di studiare quel tanto che bastasse per passare gli esami. Perdetti poi
« due anni *) in occupazioni affatto aliene dalle mie tendenze. Dopo
« questa dura prova, formai recisamente il proposito di darmi a studiare
« la matematica, e (questa è la sola cosa di cui sinceramente mi lodo)
« tolsi a studiare con tutta diligenza una dopo l'altra l'aritmetica, l'algebra,
« la geometria, la trigonometria, l'algebra superiore e il calcolo, come
« avrebbe fatto uno che avesse percorso un'altra Facoltà, che la mate-
« matica ».—Aggiunge di avere studiato il calcolo sui trattati di Bordoni, i determinanti di Brioschi e buona parte della geometria analitica di Monge; e conchiude: « Ecco la mia suppellettile scientifica:
« sento che è molto scarsa. Soprattutto mi sta assai sul cuore l'essere
« *tamquam tabula rasa* delle dottrine spettanti al calcolo delle variazioni,
« ai lavori di Jacobi e di Abel, alle ricerche di Gauss sulle super-
« ficie, ecc. ».

Sì, la suppellettile era scarsa rispetto all'alta meta alla quale egli tendeva; ma non già per un giovane forzatamente assorbito dai doveri d'un ufficio amministrativo, che ogni giorno più gli veniva a noia. Per liberarsene, cercò un'impiego nell'insegnamento secondario; ma gli fu d'ostacolo la mancanza della laurea. Questa fu anche cagione che venisse respinto (ben tre volte) dai concorsi ai posti di sottotenente nel Genio militare, ai quali s'era presentato, perchè « nell'attuale rinnovazione della
« patria nostra (com'egli si esprime in una lettera del 15 dicembre 1860),
« mi doleva al sommo di dovere per circostanze imperiose, ma ignote
« agli altri, restarmi completamente estraneo al movimento universale ».

A breve andare però, anzi quasi di slancio, il valore del giovane matematico si rivelò a chi lo poteva apprezzare, ed ebbe il suo premio. Due memorie di lui uscirono negli *Annali di Matematica* editi a Roma dal Tortolini; su di esse fu chiamata l'attenzione del Brioschi, allora segretario generale al Ministero dell'istruzione; e il Beltrami, senz'altro, fu con decreto 18 ottobre 1862 nominato professore straordinario di algebra complementare e di geometria analitica nell'Università di Bologna.

Svincolato dall'ufficio nelle strade ferrate, che aveva tenuto per sei anni, e dove s'era guadagnata la stima e l'affetto dei capi e dei colleghi, il professore novello, seco conducendo la madre dalla quale non si era

*) I primi due anni di Verona.

mai diviso, recavasi a Bologna, e saliva su quella cattedra che era la mèta agognata, e che sentiva di poter tenere con onore.

Ma non passarono molti mesi e già il Beltrami era chiamato ad altra sede. Proclamato il Regno d'Italia, il Governo del Re si studiava di attrarre i migliori ingegni e i giovani più promettenti alle cattedre nuovamente istituite nelle università. Mancato ai vivi nel marzo 1863 il Mossotti, a Pisa primeggiava nelle scienze esatte Enrico Betti, ed a proposta di lui fu offerta al Beltrami la cattedra di geodesia in quella Università, col grado di professore ordinario. L'impreveduta e, per tutt'altri, seducente proposta, per poco non fu, per modestia, ricusata dal Nostro.

Chiese il consiglio ad un amico in questi termini: « Io sarei determinato di rifiutare l'offerta fattami dal Betti, per più ragioni. Prima « di tutto per la necessità di mutare l'indirizzo dei miei studî, il che porta « sempre con sè degli inconvenienti e dei perditempi, tanto più che, parlandomi il Betti di studî preparatorî da farsi in un osservatorio, pare « che le materie da trattarsi nella nuova cattedra non debbano essere « puramente teoriche. In secondo luogo la cattedra di introduzione al « calcolo mi piace di più e per la natura dell'argomento che ne forma « l'oggetto, e per la maggior latitudine che lascia nella scelta degli studî. « Finalmente mi spiacerebbe occupare un posto che l'opinione pubblica « amerebbe meglio probabilmente affidare ad un distinto cultore di studi « affini, voglio dire al Codazzi; e che, anche prescindendo da ciò, potrebbe essere ambìto da professori più provetti di me e già benemeriti « dell'insegnamento. Quanto al vantaggio pecuniario che potrei avere dalla « nomina a professore ordinario, esso non è che momentaneo, in quanto « che io ho a sperare lo stesso risultato dopo un tirocinio più o meno « lungo anche nel posto che occupo adesso, e senza abbandonare l'università in cui ti ho a collega. Comunque sia, non ho voluto rispon- « dere al Betti prima d'aver chiesto il tuo consiglio, che ti prego volermi far conoscere liberissimamente ».

A questa lettera datata da Venezia 16 agosto 1863, l'amico consultato rispose esortando e persuadendo ad accettare. Ma nei passi ora citati, come risplende già l'anima onesta e pura del Beltrami! e come quei tempi e quegli uomini erano diversi da tempi e da uomini posteriori, quando fu veduta una folla di postulanti far ressa alle porte del Ministero e del Consiglio superiore dell'Istruzione!

Il Beltrami cedette ed accettò la cattedra di Pisa, dove si recò ai primi di febbraio 1864. Aveva insegnato a Bologna per un solo anno scolastico; indi, ottenuta licenza per l'indugio, aveva dimorato in Milano per alcuni mesi (da ottobre a tutto gennaio) che consacrò a studi preparatori per la nuova cattedra, lavorando con l'astronomo Schiaparelli, salito poi ad altissima fama, onore della scienza e dell'Italia. « Stiamo calcolando (scriveva egli il 26 novembre 1863) la compensa-« zione della rete trigonometrica che venne formata nel 1843 per servir « di base alla pianta di Milano. Il problema si riduce a risolvere diciotto « equazioni lineari a diciotto incognite, ed è precisamente ciò che da « quattro o cinque giorni ci occupa esclusivamente, colla speranza di finire « oggi o domani. È un buon esercizio di applicazione del metodo dei « minimi quadrati ».

A Pisa strinse col Betti una amicizia fraterna, durata quanto la vita, ed ebbe frequente consuetudine col Riemann, che per ragioni di salute aveva fissato la sua dimora in quella città: i colloqui con questi due eminenti matematici e l'ulteriore corrispondenza epistolare col Betti esercitarono grande influenza sul Beltrami e sull'indirizzo delle sue ricerche scientifiche *).

Nell'Ateneo pisano non rimase che tre anni scolastici; quel clima si mostrò contrario alla salute della sua diletta madre, così che il Beltrami desiderò ed ottenne, nel settembre 1866, di essere restituito all'Università di Bologna, occupandovi la cattedra di meccanica razionale: disciplina codesta verso la quale egli si sentiva, meglio che verso la geodesia, inclinato. In quest'insegnamento e nel clima salubre di Bologna egli si trovò soddisfatto e tranquillo per buon numero di anni.

Nel febbraio 1868 condusse in moglie Amalia Pedrocchi veneziana, che gli è stata compagna amorosa e fida per tutta la seconda metà della vita, circondandolo delle assidue cure del più tenero affetto, e che ora sopravvive a piangerlo, inconsolabile e derelitta.

Nel settembre 1870 Roma era stata restituita all'Italia e poi vi si era insediato il governo del nuovo Regno. Divenuto ministro dell'istruzione Antonio Scialoja, questi si accinse con nobile ardore a rialzare le sorti dell'Università romana, chiamando valorosi scienziati ad occuparne

*) Cerruti, nei Rendiconti dei Lincei, 4 marzo 1900.

le cattedre vacanti. Dei desiderati e ricercati fu uno il nostro Beltrami, il quale si lasciò persuadere nell'ottobre 1873 a 'muoversi da Bologna, conservata la cattedra di meccanica razionale, come professore ordinario, e aggiuntovi l'incarico di un corso d'analisi superiore.

A questo mutamento di sede il Nostro era stato però alquanto reluttante: lo tratteneva il pensiero della madre, prevedendo di non poterla trasportare a tanto maggiore distanza dai suoi genitori che essa ancora aveva più che ottuagenarî a Venezia; il quale molesto pensiero accresceva le dubbiezze proprie dell'indole sua d'uomo tranquillo, tutto dedito alla scienza ed alla scuola. Tuttavia lo vinsero per allora le istanze vivissime degli amici; ed il Beltrami accettò e colla moglie si trasferì a Roma.

Se non che, non andò molto ch'egli credette aver ragione di pentirsene. A Roma gli parve che il riordinamento universitario, promesso e sperato tale da compensare le agitazioni proprie di una grande città, fosse di dubbia e lontana attuazione; lo spaventarono o disgustarono le difficoltà del nuovo assetto, minaccianti le sue aspirazioni alla quiete per gli studî prediletti; e, peggio ancora, lo impensierirono timori per la salute della moglie, alla quale sembrava non confacente l'aria della città eterna, che per pregiudizî non ancora smentiti si accusava d'insalubrità. Perciò il Nostro aperse l'orecchio a seducenti proposte che gli venivano da altri Atenei; e siccome da qualche tempo egli aveva rivolto i suoi studî alle applicazioni dell'analisi alla fisica, così si determinò a chiedere e ottenne il passaggio all'Università di Pavia, dove infatti andò nell'ottobre 1876 ad occuparvi la cattedra di fisica matematica, coll'incarico di un corso di meccanica superiore. Non è a dire quanto dolesse ai colleghi di qui la partenza del Beltrami. Essi l'accompagnarono coll'augurio che nuovi casi lo restituissero a Roma in tempo non lontano: ma l'augurio non fu esaudito che quindici anni dopo, nel 1891 *).

A Pavia il Beltrami trovò, non clima migliore, ma quiete maggiore ed altri amici, fra i quali carissimo Felice Casorati, che gli tenne grata compagnia per quasi quattordici anni. Un po' più tardi, cioè nel 1880, si unì ad essi Eugenio Bertini. Morto immaturamente l'ottimo Casorati nel settembre 1890, il Beltrami n'ebbe una tristezza invincibile e sentì l'amarezza dell'isolamento. E poichè e a lui e

*) Cerruti, l. c.

più all'amata consorte le nebbie del Ticino non erano riuscite così propizie come sul principio s'era lusingato, si arrese ai rinnovati inviti degli amici di Roma.

Per tal modo a cominciare dall'anno scolastico 1891-92 il Beltrami fu restituito all'Ateneo della Capitale, dove rientrò desiderato e acclamato da colleghi e da scolari. E con noi rimase sino a che una morte immatura non ce lo rapì per sempre, infliggendo una perdita gravissima e irreparabile alla scienza ed alla patria.

Dopo aver narrato la carriera scolastica del Beltrami, dirò brevissimamente della sua attività scientifica. Egli è stato quello che gli inglesi dicono un *self-made man:* non fu l'allievo di una determinata scuola, o di questo o quel maestro; dopo i corsi universitarî, superficialmente seguiti, come egli stesso confessava, e dopo alcuni anni di occupazioni e lavori burocratici, rifece da capo e da sè solo la sua educazione scientifica. Egli, sempre modesto, si professava grato a consigli ricevuti; ma del resto studiò ed apprese tutto da sè. E studiò così bene, così poderosamente e così rapidamente che in pochissimi anni si trovò in possesso delle dottrine più alte e potè intraprendere e condurre a buon fine difficili ricerche originali.

Nei pochi anni di Pisa, l'indole della sua cattedra lo portò allo studio delle superficie nell'indirizzo dato da Gauss; ed in particolare ad occuparsi della teoria matematica delle carte geografiche. Di tali studî diede mirabili saggi nelle *Ricerche di analisi applicata alla geometria,* e nella memoria *delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.*

Egli stesso racconta in una lettera del 25 dicembre 1872 ad Enrico D'Ovidio, come fosse condotto a cercare le superficie rappresentabili sopra un piano per guisa che le loro linee geodetiche siano figurate da linee rette; e come risolvesse il problema in una memoria del 1866, dimostrando che tali superficie devono essere di curvatura costante *). Di qui fu breve il passo a quella *interpretazione della geometria non-euclidea,* che proiettò una luce inaspettata nella controversia allora agitata intorno ai principî fondamentali della geometria ed ai concetti di Gauss e Lobatschewsky. E subito dopo, svolgendo l'idea madre della predetta memoria del 1866 e coordinandola ai principî tracciati da Riemann

*) E. d'Ovidio, negli Atti dell'Accademia di Torino, 25 febbraio 1900.

in un celebre lavoro postumo, allora da poco venuto in luce, pubblicò le memorie *sulla teoria degli spazi di curvatura costante*, *sulle superficie di area minima* e *sui parametri differenziali*.

L'eleganza e la genialità di cotesti lavori diedero al Beltrami quasi di slancio quella riputazione che si andò sempre più diffondendo, sino a divenire ammirazione universale.

Le questioni sino allora trattate, altamente suggestive di meditazioni sulla natura dello spazio fisico, e d'altra parte i metodi analitici da lui usati nella geometria differenziale, applicabili anche nella meccanica e nella fisica matematica, lo attirarono quasi spontaneamente verso i problemi proprî di questi due rami della scienza. Ai quali studî di analisi applicata egli era del resto mirabilmente preparato, sia per gli insegnamenti di geodesia e di meccanica, tenuti a Pisa e a Bologna, sia per quell'influenza del Betti che già ho accennata, sia per una tendenza del suo ingegno che le matematiche concepiva nella loro genesi storica, come mezzo per lo studio della natura, ed era meno inclinato alle astratte speculazioni dell'analisi pura: tanto che, anche nei pochi suoi lavori strettamente analitici, si intravedono quasi immediate le applicazioni a cui mira, anzi può dirsi che queste reggono e promuovono le ricerche di analisi *).

Lo strumento del quale, oltre all'intuizione geometrica, si servì costantemente e che giunse a perfezionare ed a maneggiare da maestro, era bensì l'analisi matematica; ma questa non fu per lui, come talvolta per altri insigni, per es. per Brioschi, scopo a sè stessa. Nella elegante commemorazione del suo predecessore **), che, due anni or sono, il Beltrami lesse in quest'aula, davanti alle Vostre Maestà, egli distinse nell'analisi matematica due tendenze o scuole: la classica rappresentata da Eulero e da Jacobi, ed un'altra germogliata dalle opere di Lagrange, secondata dai metodi di Gauss e di Dirichlet, e definitivamente maturata con Cauchy e con Riemann. Delineata questa giusta distinzione, il Nostro dimostrò chiaramente che Brioschi appartenne alla prima scuola; ed ora si può affermare con pari sicurezza che Beltrami è un esempio, altrettanto splendido, della seconda tendenza.

*) Somigliana, nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1 marzo 1900.

**) Riprodotta in questi Rendiconti, t. XIV, pp. 262-274. [N. d. R.].

A cominciare del 1871 Beltrami dedicò un'estesa serie di lavori alla cinematica dei fluidi, alla teoria del potenziale, ed a quelle dell'elasticità, della luce, dell'elettricità, del magnetismo e della propagazione del calore, abbracciando quasi tutto il vastissimo campo della fisica matematica.

Nello studio delle equazioni generali dell'elasticità si trovò ricondotto alle sue celebri ricerche di geometria, poichè ebbe a scoprire che le equazioni di Lamé sono vincolate al postulato euclideo sullo spazio. Potè quindi spontaneamente estenderle agli spazî di curvatura costante, aprendo nuovi orizzonti alla teoria dell'elasticità. E pensò subito, sebbene con prudenti riserve, a giovarsi di codesta generalizzazione, per tentare di chiarire le oscurità delle teorie del Maxwell, dirette a sostituire, secondo le idee di Faraday e di W. Thomson *), alle azioni a distanza, quelle fra i punti contigui di un mezzo continuo diffuso in tutto lo spazio **). Dell'arduo problema il Nostro fece una discussione completa che lo condusse a risultato negativo, senza però che egli abbia voluto concluderne il rigetto della dottrina di Maxwell.

La grande innovazione dello scienziato inglese risiede nelle equazioni differenziali colle quali egli rappresenta l'universalità dei fenomeni elettrostatici, elettrodinamici ed elettromagnetici, ed alle quali le meravigliose scoperte di Hertz, illustrate ed ampliate dal nostro Righi, hanno dato credito ed appoggio. Maxwell le deduce per divinazione, più che non le dimostri, dalle equazioni di Hamilton della meccanica. Beltrami invece ha proposto di stabilirla partendo dal principio di d'Alembert generalizzato ed esteso all'elettrodinamica: metodo che, senza nulla mutare alla sostanza delle idee di Maxwell, conduce più rapidamente e più sicuramente allo scopo ***).

Per tutto l'ultimo periodo della sua attività scientifica Beltrami continuò a consacrare lunghe meditazioni e importanti lavori ai concetti del sommo fisico di Cambridge, concetti la cui importanza dal punto di vista sperimentale è andata via via crescendo, fino ad acquistare un dominio quasi assoluto nel nostro modo di concepire i fenomeni elettrici e magnetici †).

---

*) Lord Kelvin.

**) Somigliana, l. c.

***) Maurice Lévy, nei «Comptes rendus», 12 marzo 1900.

†) Somigliana, l. c.

Gli scritti scientifici del Beltrami superano il centinaio. In tutti, all'importanza ed elevatezza della materia va congiunta la forma eletta, insuperabile per lucidità ed eleganza di dettato. Felice connubio dell'intuizione geometrica colle finezze più riposte dell'analisi, e vasta comprensione di metodi generali con una rara abilità nel piegarli alle applicazioni particolari assicurano ai lavori del Nostro un posto durevole nella storia delle matematiche, pur prescindendo dalle idee nuove e dai nuovi risultati che l'universale consenso degli studiosi gli riconosce *).

E quale lo scrittore tale era il maestro. Coloro che ebbero la fortuna di assistere alle sue lezioni attestano che le dottrine più ardue e spinose acquistavano dal magistero della sua parola tale grado di evidenza e di semplicità da generare, in chi l'ascoltava, l'illusione che avrebbe saputo pervenire agevolmente da sè alla scoperta delle verità dichiarate dal professore **).

Tali erano l'ingegno e la valentia scientifica e didattica del Beltrami; nè ai confini pur remoti delle matematiche si arrestava il sapere di lui; chè egli possedeva coltura non comune e varia, parola facile, arguta, adorna, come di chi ha domestichezza cogli studi letterari. Aveva una rara conoscenza scientifica della musica, della quale era anche esecutore abile e ispirato ***). Gli era stata maestra fin dai più teneri anni la madre; poi s'era esercitato con Amilcare Ponchielli, suo coetaneo e concittadino. Questo talento musicale egli nascondeva con ritrosa modestia, come se temesse d'essere accusato d'infedeltà verso la gelosa dea, la matematica, alla quale si era tutto consacrato; ma i pochissimi intimi e intelligenti attestano ch'egli sapeva eseguire maestrevolmente al pianoforte i capolavori di Bach, Beethoven, Mendelssohn, Schumann †).

---

*) Cerruti, l. c.

**) Cerruti, l. c. — Frattini, nel Periodico di Matematica, marzo-aprile 1900.

***) Celoria, nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1 marzo 1900.

†) Cassani, Atti dell'Istituto Veneto, 25 febbraio 1900.

Da un foglietto trovato tra le carte del Nostro, e che sembra essere la minuta di una lettera all'amico dott. Gustav Wolff (nel 1886-87 professore al Conservatorio di Lipsia), togliamo il brano che segue:

« Il y a entre la musique et les mathématiques un rapprochement que l'on n'a « peut-être pas encore remarqué. Si l'on conçoit le domaine général des idées comme

Rigido con sè stesso e indulgente verso gli altri, spirito calmo, sereno; affabile, cortese, di modi per innata gentilezza dell'animo, esercitava, inconsciamente, in chi pur per poco l'avvicinasse, un fascino irre-

---

« étant un système continu, le champ des idées mathématiques n'en forme qu'une très « faible partie; ou, pour mieux dire, elles n'y figurent, à mon avis, que comme les « raies de Fraunhofer dans l'étendue du spectre solaire. Ainsi, il y a une gamme « mathématique comme il y a une gamme musicale. De ce point de vue, un raison- « nement mathématique est comme une suite d'accords tirés de la lyre intellectuelle « formée par les raies mathématiques de la pensée humaine, et la découverte d'une « branche nouvelle de mathématiques est comparable à celle d'une nouvelle modulation « harmonique. Mais tandis qu'on peut très bien déplacer la gamme musicale sans « altérer les rapports harmoniques, on ne peut pas déplacer la gamme mathématique; « du moins l'on n'a pas d'exemple, dans l'histoire de la science, que le même théo- « rème se soit présenté, à différentes époques, ou chez différents peuples, dans des « *tons* différents. Les accords mathématiques ont donc une existence absolue, tandis « que les accords musicaux n'en ont qu'une relative.

« *P.S.* Si ces idées paraissent à M. Wolff trop étranges ou trop compromet- « tantes, je suis prêt à les supprimer; pourvu qu'il laisse toujours subsister entre son « esprit de musicien et mon esprit de mathématicien ce seul accord véritablement « parfait, qui représente l'amitié la plus sincère.

E. B. »

A proposito del ravvicinamento fra la matematica e la musica, mi sia concesso di citare alcuni passi di altra lettera (più antica) del Nostro, provocata da una nota dell'illustre Sylvester che si legge a pag. 613 della Memoria *On the real and imaginary roots of algebrical equations* (Philosophical Transactions, parte III, 1864). La nota è la seguente:

« Herein I think one clearly discerns the internal grounds of the coincidence « or parallelism, which observation has long made familiar, between the mathematical « and musical εἶδος. May not Music be described as the Mathematic of sense, Mathematic « as Music of the reason? the soul of each the same! Thus the musician *feels* Ma- « thematic, the mathematician *thinks* Music, — Music the dream, Mathematic the « working life — each to receive its consummation from the other when the human « intelligence, elevated to its perfect type, shall shine forth glorified in some future « Mozart-Dirichlet or Beethoven-Gauss — a union already not indistinctly « foreshadowed in the genius and labours of a Helmholtz! ».

E Beltrami nella sua lettera da Pisa, 7 aprile 1865:

« Credo che ci sia molto di vero nel pensiero del Sylvester che mi trascrivesti. Io non ho mai studiato profondamente la così detta *Armonia*, che è quella parte della scienza musicale che può in certo qual modo riguardarsi come dottrina razionale, avendo i suoi postulati ed i suoi assiomi, da cui tutto il resto è dedotto. Ma per quel poco che ne so, parmi infatti che il processo mentale ad essa applicabile sia identico

sistibile; a Bologna, a Pisa, a Pavia, a Roma, ovunque egli professò, divenne ben presto il centro intorno al quale si adunavano gli studiosi delle più diverse discipline, l'anima di una conversazione geniale e dotta, non mai pedantesca *).

Della sua costante fedeltà al culto della scienza è prova indiscutibile il fatto che, nella sua carriera di oltre trentasette anni, non si lasciò mai adescare, nè per ambizione, nè per guadagno, ad accettare uffici che lo svagassero dagli studi. Non volle mai far parte di Corpi amministrativi, nè essere Preside di Facoltà o Rettore di Università; accettò soltanto di entrare nel Consiglio superiore dell'istruzione, mandatovi dai suffragi dei colleghi. Non cercò alcuno degli onori soliti a conferirsi ai dotti, ma li ebbe tutti. L'Accademia di Bologna fino dal 1867, la Società Italiana (dei XL) dal 1870, questa R. Accademia dei Lincei dal 1873, l'Istituto Lombardo, l'Accademia di Torino, la Società Reale di Napoli, le Accademie delle scienze di Parigi, di Berlino, di Monaco, la Società di Gottinga, la Società matematica di Londra ed altre lo aggregarono a sè come Socio o come Corrispondente. Dottore *honoris causa* delle Università di Kazan (1893) e di Halle (1894). Cavaliere del merito civile di Savoia (1879).

Della grande riputazione che il nostro aveva acquistata nel mondo scientifico, anche presso gli stranieri, mi sia concesso addurre quest'altra prova. Nel 1889 scadeva il quinquennio di professorato straordinario di analisi matematica per la celebre Sofia Kowalewsky all'Università di Stoccolma. Per deciderne la conferma a vita, come professore ordinario, quell'Università chiese i pareri di tre scienziati che riteneva i più autorevoli in quell'indirizzo di studi: Hermite, Bjerknes e Beltrami. I pareri furono tutti e tre onorevoli ed in favore di quel *savant, dont le sexe était aussi exceptionnel que le mérite* (secondo una frase del Nostro, da una lettera del 18 maggio 1889 a Hermite). Ma non erano compiuti due anni e una morte crudele toglieva immaturamente l'illustre

o poco meno con quello delle matematiche. Mettendomi per un istante nell'ipotesi materialistica, direi quasi che nell'una e nell'altra scienza sono posti in azione gli stessi organi. Quanto poi alla composizione, nel senso più lato, parmi che subentrino altri elementi, assai differenti dai primi. Comunque sia, è notevole che uno dei più grandi armonisti e compositori dei tempi moderni, Meyerbeer, abbia cominciato collo studiare matematiche, nelle quali si addottorò ».

*) Celoria, l. c.

donna, all'Università ed alla scienza che da lei attendevano ulteriori frutti del suo miracoloso ingegno.

Ultimo onore la nomina a Senatore del Regno: onore che a lui giunse assai gradito, perchè la sua modestia non gli toglieva di sentirsene degno, e sopratutto perchè, per atto di alta e cavalleresca cortesia, la comunicazione gli venne dall'augusta bocca del nostro amato Sovrano, nell'adunanza solenne dei Lincei, il 4 giugno 1899.

Ed ora quello spirito eletto non è più fra noi. Se qualche cosa sopravvive oltre la tomba, di certo egli è salito ad un astro superiore, più perfetto del nostro pianeta, ed ivi si delizia nella beatitudine del vedere illuminati e risoluti quei problemi che trascendono l'acume della mente umana, ma spesso la tormentano affannosamente. Di lassù egli implora rassegnazione e pace alle anime desolate delle due infelicissime donne, la madre e la vedova che gli sopravvivono, anelanti di ricongiungersi a lui. Alle sue preghiere uniamo i nostri voti.

A me ed a quelli che con me hanno oltrepassata l'età del Beltrami, non rimane alcun conforto, se non sia il ricordo della sua cara e preziosa amicizia. Ma i giovani non dimentichino che hanno un tesoro da custodire: l'esempio di una vita immacolata, tutta spesa nel culto della scienza e nella scuola del dovere, e la gloriosa memoria di un altissimo ingegno, che ha onorato la patria e l'umanità.

SULLE CONDIZIONI DI RAZIONALITÀ DEI PIANI DOPPI.

Nota di **G. Castelnuovo** (Roma) e **F. Enriques** (Bologna).

Adunanza del 9 dicembre 1900.

I piani doppi $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ che sono razionali [tali adunque che esista una sostituzione razionale $x = \varphi(XY)$, $y = \psi(XY)$ trasformante il polinomio f in un quadrato perfetto *)], dànno luogo a tre *tipi* irriducibili, in cui la *curva di diramazione* $f = 0$ è rispettivamente:

1) una curva C_{2n} d'un certo ordine $2n$ dotata d'un punto $(2n - 2)$-plo;

2) una quartica generale C_4;

3) una sestica C_6 dotata di due punti tripli infinitamente vicini.

La razionalità dei piani doppi di questi tipi è stata dimostrata da Clebsch e Noether, in relazione alla bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane appartenenti alle curve di diramazione sopra nominate.

Il sig. Noether ha poi dato il teorema **): Se un piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ è razionale, la sua curva di diramazione si può trasformare, con una trasformazione birazionale del piano (xy), in una C_{2n} o in una C_4 o in una C_6 appartenenti ai tre tipi menzionati.

Ma, a vero dire, il ragionamento con cui l'Autore è pervenuto a quest'ultima importante proposizione, mentre non appare chiaramente espresso nella breve Nota di lui, lascia anche nella sua mente il dubbio,

*) La condizione *d'invertibilità* della trasformazione può ritenersi superflua in base al teorema della razionalità delle involuzioni piane.

**) Noether, *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (Sitzungsberichte der physik. medicin. Soc. zu Erlangen, 14 Januar 1878).

francamente dichiarato, intorno alla possibile esistenza di qualche altro piano doppio razionale dotato di caratteri singolarissimi.

Ad escludere questo dubbio vale una dimostrazione indiretta della proposizione in parola fondata sopra la conoscenza dei tre tipi, a cui il sig. Bertini ridusse le involuzioni piane di coppie di punti *); infatti ogni piano doppio razionale può farsi nascere, per mezzo di una trasformazione [2, 1], da una involuzione che può supporsi ridotta ad uno dei tre tipi nominati **). E poichè le ricerche dei signori Kantor, Castelnuovo, Wimann hanno ormai rigorosamente giustificata la riduzione a tipi del sig. Bertini (ottenuta dall'Autore con un procedimento che lasciava qualche lacuna), anche la classificazione dei piani doppi razionali si palesa così sicuramente completa.

Una nuova dimostrazione diretta e luminosa, costituente la vera via maestra per giungere a questo resultato, scaturisce dal procedimento assai semplice che esponiamo nella presente Nota. Il qual procedimento ci ha condotti invero ad un teorema di più larga portata esprimente le condizioni di razionalità (o di riferibilità ad una rigata) di un piano doppio; un teorema che permette di verificare questa razionalità, qualunque sia la curva di diramazione assegnata, decidendo a priori la questione della sua trasformabilità in una delle curve C_{2n}, C_4, C_6 sopra nominate:

Le condizioni perchè un piano doppio $\{x, y, \sqrt{f_{2n}(xy)}\}$ *sia razionale o rappresenti una rigata, sono espresse dalla non esistenza di curve d'ordine* $2n-6$, $2n-9$, ..., *aggiunte rispettivamente d'indice* 2, 3, ... *alla curva di diramazione, fatte però le opportune convenzioni sul modo di computare i punti multipli d'ordine dispari della detta curva* (cfr. n° 1).

Si può anche distinguere facilmente il caso della razionalità del piano doppio, dal caso in cui esso rappresenti una rigata di genere $p > 0$, poichè in quest'ultimo caso la curva di diramazione consterà di $2p+2$ curve razionali, costituenti insieme una curva di genere virtuale $-(2p+1)$, laddove la curva di diramazione di un piano doppio razionale ha sempre il genere virtuale $\geqq -1$.

---

*) *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* [Annali di Matematica, s. II, t. VIII (1877), pp. 244-286]. Cfr. una Nota dello stesso Autore nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, s. II, v. XIII (1880).

**) Cfr. Bertini, *Deduzione delle trasformazioni piane doppie dai tipi fondamentali delle involutorie* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, v. XXII (1889), pp. 771-778].

Introducendo la nozione dei *generi* o *plurigeneri* di una superficie [*genere* $P_1 = p_g$, cioè numero delle superficie φ_{n-4}, d'ordine $n-4$, linearmente indipendenti, che sono *aggiunte* ad una superficie F_n d'ordine n; *bigenere* P_2, cioè numero delle φ_{2n-8}, d'ordine $2n-8$, *biaggiunte* ad $F_n, \ldots$ *)], si ha il teorema:

Le condizioni perchè un piano doppio con curva di diramazione C_{2n}, d'ordine $2n$, sia razionale o rappresenti una rigata, sono espresse dall'annullarsi dei plurigeneri $P_2, P_3, \ldots P_{\left[\frac{2n}{3}\right]}$ $\left(\text{designando con } \left[\frac{2n}{3}\right] \text{ il massimo intero contenuto in } \frac{2n}{3}\right)$.

Può darsi del resto che queste condizioni dipendano dall'annullamento di un minor numero di generi $P_2, P_3, \ldots$. Forse anzi dall'essere soltanto $P_2 = 0$ potrebbe trarsi come conseguenza $P_3 = P_4 = \ldots = P_{\left[\frac{2n}{3}\right]} = 0$.

Questo teorema ha notevoli applicazioni nello studio delle superficie contenenti sistemi lineari di curve ellittiche o iperellittiche (cfr. n° 5); ed il procedimento, che ad esso conduce, si manifesta utilissimo per la trattazione di varie questioni legate alle trasformazioni Cremoniane del piano (n° 6).

1. Dobbiamo ricordare anzitutto alcune nozioni d'indole generale sui piani doppi.

Abbiasi un piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$. La sua curva di diramazione sarà sempre una curva C_{2n}, di un certo ordine pari $2n$ (poichè alla $f = 0$ si deve aggiungere la retta all'infinito, se f è di grado dispari), ed inoltre si potrà supporre priva di componenti multiple, poichè una componente che entrasse più volte in C_{2n}, potrebbe sempre togliersi un numero pari di volte.

Ora se, nel piano (xy), si eseguisce una trasformazione birazionale, il piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ si cambia in un altro piano doppio $\{X, Y, \sqrt{F(XY)}\}$ avente come curva di diramazione una curva C_{2m}, d'un certo ordine pari $2m$, *trasformata* della C_{2n}. Ma il significato della parola *trasformata* è qui un pò diverso dal significato abituale, giacchè

*) Cfr. Enriques, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), s. III, t. X (1896)], §§ 38, 39; Castelnuovo e Enriques, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques* [Mathematische Annalen, t. XLVIII (1897)], n° 30.

occorre tener conto di quelle curve fondamentali del piano (XY), che nascono nella trasformazione da punti di C_{2n} [fondamentali pel piano (xy)]; precisamente se una di queste curve proviene da un punto r-plo di C_{2n}, essa dovrebbe esser computata r volte come componente della trasformata di C_{2m}. Siccome però nella detta trasformata si possono sopprimere tutte le componenti che vi entrano un numero pari di volte, si può dire in fine che la C_{2m}, trasformata della C_{2n}, consta della curva trasformata in senso proprio e delle curve fondamentali nascenti dai punti multipli d'ordine dispari della C_{2n} (curve da contarsi una sola volta).

Così essendo fissate le cose, si potrà sempre *trasformare* la C_{2n} in una curva C_{2m}, d'ordine pari $2m$, dotata soltanto di punti multipli d'ordine pari e distinti. Relativamente alla C_{2m} si potranno considerare le curve C_{2m-3}, d'ordine $2m - 3$, aggiunte (d'indice 1), le C_{2m-6}, d'ordine $2m - 6$, aggiunte delle aggiunte (aggiunte d'indice 2 alla C_{2m}), ecc.

Ora le nominate curve C_{2m-3}, $C_{2m-6}, \ldots$, aggiunte (d'indice 1, 2, ...) alla C_{2m}, hanno carattere invariante relativamente ad ogni trasformazione birazionale del piano che muti la C_{2m} in una curva (d'ordine pari) dotata di punti multipli d'ordine pari, purchè si tenga conto delle eventuali curve (fondamentali) che nascessero da punti semplici della C_{2m}, scelti come fondamentali per la trasformazione. Se invece la C_{2m} si trasforma in una C_{2n} avente un punto multiplo O d'ordine dispari $(2i + 1)$, il punto O viene a corrispondere ad una curva fondamentale facente parte della C_{2m}; e, secondochè tale curva appartiene o no alle aggiunte C_{2m-3}, $C_{2m-6}, \ldots$, le curve C_{2n-3}, $C_{2n-6}, \ldots$ trasformate di queste, si comporteranno in O come le aggiunte, o avranno in O una molteplicità inferiore di una unità a quella delle aggiunte.

È lecito ancora di riguardare le C_{2n-3}, $C_{2n-6}, \ldots$ come curve *aggiunte* (d'indice 1, 2, ...) alla C_{2n}, purchè si faccia una opportuna convenzione relativamente ai punti multipli d'ordine dispari della curva, attribuendo loro una *molteplicità virtuale*, che può differire di un'unità da quella effettiva. Quale sia questa molteplicità virtuale dei punti della C_{2n} risulta, in tutti i casi, dal comportamento delle curve C_{2n-3} (o delle $C_{2n-6}, \ldots$) che si è detto di voler considerare come aggiunte alla C_{2n}, cioè dal comportamento di quelle curve che si trasformano in aggiunte alla C_{2m}, quando la C_{2n} si trasforma in una curva C_{2m} dotata soltanto di punti multipli d'ordine pari.

Del resto è facile determinarla nei casi più semplici:

Ogni punto multiplo d'ordine $2i+1$ della C_{2n} avrà per convenzione la molteplicità virtuale $2i$, tranne quando al punto stesso sia infinitamente vicino un altro punto $(2i+1)$-plo, nel qual caso la molteplicità virtuale del primo punto (e quella del suo infinitamente vicino) sarà, come l'effettiva, $2i+1$.

Quest'affermazione vale soltanto se si tratta di un *punto* multiplo nel senso proprio della parola; se il punto (O') di cui si discorre è esso stesso nell'intorno di 1° ordine di un altro punto O, la molteplicità virtuale di O' sarà $2i$ o $2i+1$, secondochè O ha una molteplicità d'ordine pari oppure d'ordine dispari.

Pel nostro scopo non è necessario andare più oltre, assegnando la molteplicità virtuale dei punti di C_{2n} che si trovino in un intorno d'ordine superiore di un *punto* multiplo (nel senso proprio della parola). Del resto tale questione, legata alla ricerca dell'influenza delle singolarità di C_{2n} sui generi del piano doppio (cfr. n° 4), ha già ricevuto una risposta nel caso, assai ampio, in cui le singolarità della C_{2n} possano ritenersi tutte definite mediante cicli lineari *).

2. Premesse, per chiarezza, queste nozioni, consideriamo una curva C_{2n}, data come curva di diramazione di un piano doppio, e attribuiamo ai punti multipli della C_{2n} le *molteplicità virtuali* secondo le convenzioni fatte innanzi.

Supponiamo ora che la C_{2n} sia priva di curve aggiunte di tutti gli indici $1, 2, 3, \ldots$, ed esaminiamo quali conseguenze discendano da questa ipotesi. In relazione alla forma del numero n rispetto al modulo 3, avremo da considerare tre casi:

$$A)\quad 2n = 6m, \qquad B)\quad 2n = 6m+2, \qquad C)\quad 2n = 6m+4.$$

Supporremo inoltre, tranne nell'ultimo caso, che sia $m > 0$, salvo ad esaminare in seguito i casi corrispondenti alla negazione di questa ipotesi, o di quelle che via via aggiungeremo.

---

*) Cfr. Enriques, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Aprile 1898). La valutazione del genere di un piano doppio quando la curva di diramazione abbia punti multipli distinti, e l'osservazione che un punto $(2i+1)$-plo figura in tal caso come fosse $(2i)$-plo, trovasi già in Noether (Göttinger Nachrichten, 7 Juni 1871). Più tardi, nella citata Nota di Erlangen (1878), il sig. Noether stesso fu condotto a considerare la particolarità proveniente da due punti $(2i+1)$-pli infinitamente vicini.

IPOTESI A. — La mancanza di curve (d'ordine o) aggiunte d'indice $2m$ alla C_{6m} porta che la C_{6m} abbia (almeno) un punto di molteplicità $\geqq 2m+1$. Il punto O della C_{6m} la cui molteplicità (virtuale) è massima, avrà dunque una certa molteplicità virtuale:

$$a)\ 2m+2s+1, \quad \text{o} \quad a')\ 2m+2s+2, \quad \text{ove} \quad s \geqq 0;$$

e nella prima ipotesi la C_{6m} possederà (n° 1) due punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini. *Supposto* (per ora) $s<2m-1$, teniamo conto della condizione di non esistenza delle curve C_{3s+3} aggiunte d'indice $2m-s-1$ alla C_{6m}.

a) Per effetto dei punti multipli già menzionati della C_{6m}, ogni C_{3s+3} si ridurrebbe nella prima ipotesi ad una retta r [congiungente i punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini] da contarsi $3s+1$ volte, e ad una conica tangente alla retta in quei punti; per escludere la esistenza della C_{3s+3} è necessario dunque che la C_{6m} abbia qualche punto di molteplicità $\geqq 2m-s$ fuori della retta r. Allora però, mediante le coniche passanti per i due punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini di C_{6m} e per uno degli ultimi punti multipli nominati, si riesce a trasformare la C_{6m} in una curva d'ordine inferiore.

a') Se il punto O della C_{6m} ha la molteplicità $2m+2s+2$, ogni C_{3s+3} aggiunta d'indice $2m-s-1$ alla C_{6m} si ridurrebbe ad un gruppo di $3s+3$ rette per O. Ad escludere l'esistenza di una C_{3s+3} occorre dunque ammettere che la C_{6m} sia dotata di (almeno) $3s+4$ punti $(2m-s)$-pli, fra i quali non si trovino due punti allineati con O; questi punti, come subito si verifica, non potranno tutti cadere nell'intorno di primo ordine del punto O. Del resto potrebbe darsi che due dei detti punti venissero sostituiti da un punto $(2m-s+1)$-plo, oppure tre da un punto $(2m-s+2)$-plo, ecc.; ma tutti questi casi sarebbero sempre più favorevoli pel nostro scopo. Ci metteremo dunque nella peggiore ipotesi supponendo che la C_{6m} abbia, oltre O (che ha l'ordine $2m+2s+2$), dei punti $(2m-s)$-pli, e non punti di molteplicità superiore. Ora se s è pari, le coniche passanti per O e per due punti siffatti permettono di trasformare la C_{6m} in una C_{6m-2}; se s è dispari, i punti $(2m-s)$-pli di C_{6m} saranno a coppie infinitamente vicini, e le coniche passanti per i punti di una tale coppia e per O permetteranno ugualmente di trasformare la C_{6m} in una C_{6m-2}.

IPOTESI B.—La mancanza di coniche aggiunte d'indice $2m$ alla C_{6m+2}, porta che la C_{6m+2} abbia dei punti di molteplicità non inferiore a $2m+1$.

Se la più alta molteplicità dei punti di C_{6m+2} è appunto $2m+1$, si avranno 6 punti $(2m+1)$-pli a coppie infinitamente vicini (n° 1) e non appartenenti ad una conica. Allora adoperando le quintiche (componenti una rete omaloidica), che hanno come doppi i nominati 6 punti, si riesce a trasformare la C_{6m+2} in una curva d'ordine $6m-2$.

Se vi sono punti della C_{6m+2} di molteplicità più elevata, possiamo supporre che il punto O di più alta molteplicità per la C_{6m+2} abbia la molteplicità virtuale:

b) $2m+2s+1$ con $s \geqq 1$, o *b'*) $2m+2s+2$, con $s \geqq 0$.

Supporremo $s < 2m$.

b) Nella 1ª ipotesi si avranno due punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini (n° 1) della C_{6m+2}. Una C_{3s+2} aggiunta d'indice $2m-s$ alla C_{6m+2} dovrebbe avere questi punti come $(3s+1)$-pli, e quindi si spezzerebbe in una retta r da contarsi $3s$ volte e in una conica tangente ad r. Ad escludere l'esistenza di una tale C_{3s+2} occorre dunque che la C_{6m+2} abbia qualche punto di molteplicità $2m-s+1$ (o superiore) fuori di r. Allora le coniche passanti pei due punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini e per uno dei punti nominati fuori di r, permettono di abbassare l'ordine della C_{6m+2} [cfr. il caso *a*)].

b') Se O è $(2m+2s+2)$-plo per la C_{6m+2} (con $s \geqq 0$), una C_{3s+2} aggiunta d'indice $2m-s$ alla C_{6m+2} dovrebbe essere composta di $3s+2$ rette per O. Ad escludere l'esistenza di una siffatta C_{3s+2} bisogna dunque ammettere che la C_{6m+2} sia dotata di (almeno) $3s+3$ punti di molteplicità $2m-s+1$, fra i quali non si trovino due allineati con O, e che non potranno cadere tutti nell'intorno di 1° ordine di O. Allora la C_{6m+2} si può trasformare in una curva d'ordine $6m$ mediante le coniche passanti per il punto O e per due dei nominati punti $(2m-s+1)$-pli; occorre sceglier questi due ultimi infinitamente vicini tra loro, dato che s sia pari, come è certo possibile in questa ipotesi [cfr. il caso *a'*)].

Ipotesi C. — La mancanza di rette aggiunte d'indice $2m+1$ alla C_{6m+4} porta che la C_{6m+4} abbia almeno tre punti $(2m+2)$-pli non allineati, oppure punti di molteplicità superiore. Se la C_{6m+4} ha tre punti $(2m+2)$-pli, il suo ordine si abbassa di due unità con una trasformazione quadratica. Supposto invece che la C_{6m+4} abbia un punto O di molteplicità superiore, conviene distinguere i due casi in cui O abbia la molteplicità virtuale:

c) $(2m + 2s + 1)$, con $s \geqq 1$, o *c'*) $(2m + 2s + 2)$, con $s \geqq 0$.

Supporremo per ora, in ogni caso, $s < 2m + 1$.

c) Nel 1° caso la C_{6m+4} avrà due punti $(2m + 2s + 1)$-pli infinita mente vicini (n° 1), e, per la mancanza delle curve C_{3s+1} aggiunte d'indice $2m - s + 1$, possederà altri punti $(2m - s + 2)$-pli fuori della retta congiungente i punti multipli sopra nominati, sicchè l'ordine della C_{6m+4} potrà sempre abbassarsi con una trasformazione quadratica [cfr. i casi *a*) e *b*)].

c') Nel 2° caso la mancanza di curve C_{3s+1} aggiunte d'indice $2m - s + 1$ alla C_{6m+4}, porterà l'esistenza di punti di molteplicità $2m - s + 2$ per la C_{6m+4}, i quali saranno a coppie infinitamente vicini (n° 1), se s è dispari; e tra questi punti si potranno sempre scegliere due che, insieme al punto $(2m + 2s + 2)$-plo O, sieno base per una rete di coniche, la quale permetta di trasformare la C_{6m+4} in una curva d'ordine inferiore [cfr. i casi *a'*) e *b'*)].

Dalle considerazioni ora svolte in relazione ai tre casi A, B e C segue adunque che il processo di riduzione della C_{2n} $(2n = 6m,\ 6m + 2,\ 6m + 4)$ si arresterà soltanto quando sieno contraddette le ipotesi fatte per via, le quali possono così riassumersi: si è supposto $m > 0$ nei casi A e B, inoltre si è supposto $s < 2m - 1,\ 2m,\ 2m + 1$ nei casi A, B, C, rispettivamente. Quel processo di riduzione si arresterà dunque, quando si abbia $2n = 2$, oppure quando la C_{2n} possegga un punto $2n$-plo o due punti $(2n - 1)$-pli infinitamente vicini, e in questi soli casi. Ma l'ultima ipotesi per $n > 1$ porterebbe la riducibilità di C_{2n}, dalla quale si staccherebbe una retta contata $2n - 2 \geqq 2$ volte; e perciò essa deve essere esclusa.

Concludiamo pertanto:

« Se la C_{2n} è affatto priva di curve aggiunte d'indice 1, 2, 3, ..., « essa può trasformarsi con una trasformazione birazionale di tutto il « piano:

« 1) in una conica,

« 2) oppure in un gruppo di un numero pari di rette uscenti da « un punto ».

3. Il processo di riduzione spiegato innanzi è ancora applicabile se mancano le curve aggiunte alla C_{2n} degli indici 2, 3, ..., pure esistendo quelle d'indice 1; soltanto il processo medesimo in questa ipotesi si arresta prima.

Distinguendo ancora i 3 casi:

$$2n = 6m, \qquad 2n = 6m + 2, \qquad 2n = 6m + 4,$$

vediamo anzitutto che la riduzione non è ora più possibile quando $m = 0$, neppure nel 3° caso. Inoltre le diseguaglianze, a cui debbono soddisfare le molteplicità $2m + 2s + 1$ o $2m + 2s + 2$ dei punti di massima molteplicità della C_{2n}, affinchè la riduzione sia possibile, diventano qui più espressive, avendosi rispettivamente nei tre casi:

$$s < 2m - 2, \qquad s < 2m - 1, \qquad s < 2m.$$

Si conclude dunque che il procedimento di riduzione della C_{2n} si arresterà soltanto quando la C_{2n} sia divenuta una quartica, oppure quando essa ammetta un punto $(2n - 2)$-plo, o due punti $(2n - 3)$-pli infinitamente vicini. L'ultima ipotesi, volendo escludere che dalla C_{2n} si distacchi una retta contata un numero pari $(= 2n - 6)$ di volte, porta $2n \leqq 6$.

Si arriva quindi alla conclusione:

« Se la C_{2n} è priva di curve aggiunte degli indici 2, 3, ..., essa « può trasformarsi con una trasformazione birazionale del piano:

« 1) in una curva di un certo ordine 2ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ dotata di « un punto di molteplicità $2\nu - 2$ o di molteplicità superiore;

« 2) in una quartica piana C_4, affatto generale;

« 3) in una sestica C_6 con due punti tripli infinitamente vicini ».

E poichè i piani doppi aventi come curva di diramazione una delle nominate $C_{2\nu}$, C_4, C_6, sono razionali o rappresentano rigate (casi particolari corrispondenti all'elevarsi delle molteplicità dei punti della $C_{2\nu}$, o all'esistenza di ulteriori singolarità per la C_4 o per la C_6), così abbiamo il teorema:

Se la curva di diramazione C_{2n} di un piano doppio è affatto priva di curve aggiunte C_{2n-6}, C_{2n-9}, ... degli indici 2, 3, ..., il piano doppio è razionale o rappresenta una rigata.

4. Allo scopo di invertire il resultato ottenuto, giova considerare il significato delle curve successivamente aggiunte alla curva di diramazione C_{2n} di un piano doppio, significato relativo alla superficie rappresentata sul piano doppio.

L'equazione di questa superficie, F_{2n}, può mettersi sotto la forma:

$$z^2 = f_{2n}(xy),$$

ove f_{2n} è un polinomio di grado $2n$ in x, y, che, posto $= 0$, rappresenta la C_{2n}.

Allora consideriamo i coni proiettanti dal punto all'infinito dell'asse z le C_{2n-6} aggiunte, d'indice 2, alla C_{2n}; ciascuno di essi sommato al piano all'infinito contato $2n - 2$ volte, costituisce una superficie φ_{4n-8}, d'ordine $4n - 8$, la quale è biaggiunta rispetto alla F_{2n}.

Questa affermazione si giustifica osservando il comportamento della φ_{4n-8} rispetto ai punti multipli della F_{2n}. La verifica riesce facile nel caso che la C_{2n} abbia soltanto punti multipli d'ordine pari e distinti fra loro, mentre l'estensione del resultato al caso generale si può ottenere facendo uso di un'opportuna trasformazione del piano, che muti (ove occorra) la C_{2n} in un'altra curva dotata soltanto di punti multipli d'ordine pari e distinti.

Invero i punti multipli della superficie F_{2n} cadono soltanto:

1) nel punto all'infinito dell'asse z, che è un punto $(2n - 2)$-plo particolare caratterizzato dal fatto che un piano generico passante per esso sega la superficie in una curva avente $n - 1$ punti doppi nell'intorno di primo ordine del detto punto $(2n - 2)$-plo, i quali congiunti al punto stesso dànno $n - 1$ rette coincidenti colla retta all'infinito del piano secante;

2) nei punti multipli della C_{2n}, che sono punti doppi *particolari* per la F_{2n}; precisamente uno di questi punti doppi, che sia $2i$-plo per la C_{2n}, e nell'intorno del quale non cadano altri punti multipli della curva, resta definito per la F_{2n} dalla *particolarità*, che un piano generico passante pel detto punto sega la F_{2n} lungo una curva avente infinitamente vicini al detto punto doppio altri $i - 1$ punti doppi *successivi* sopra la retta intersezione del piano nominato col piano della C_{2n}.

Si può quindi verificare che la φ_{4n-8} è biaggiunta alla F_{2n} (cioè si comporta come due superficie aggiunte prese insieme), osservando che, sopra ogni piano per uno (O) dei nominati punti singolari della F_{2n}, la φ_{4n-8} sega una curva che, presa insieme con due rette per O, costituisce una curva biaggiunta alla sezione piana di F_{2n} *).

Ora possiamo dunque dire che le C_{2n-6}, aggiunte d'indice 2 alla C_{2n}, rappresentano, sul piano doppio, quelle particolari *curve bicanoniche* della F_{2n}, la cui immagine sul piano stesso è doppia **); pertanto il numero

*) Cfr. Enriques, *Introduzione*, etc, §§ 31 e 39.

**) Cfr. Enriques, *Sui piani doppi*, etc. (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Aprile 1898).

delle C_{2n-6} linearmente indipendenti non sarà inferiore al *bigenere* P_2 della superficie.

Similmente si può vedere che il cono proiettante dal punto all'infinito dell'asse z una C_{2n-9}, aggiunta d'indice 3 alla C_{2n}, sommato al piano ($z = 0$) della C_{2n}, e al piano all'infinito, contato $4n - 4$ volte, costituisce una superficie F_{6n-12} *triaggiunta* alla F_{2n}, sicchè la C_{2n} sommata ad una C_{2n-9} rappresenta sul piano doppio una *curva tricanonica*.

In generale la C_{2n} contata s volte, presa insieme ad una curva aggiunta d'indice $s + 2$, rappresenta una curva ($s + 2$)-*canonica* della F_{2n}. Pertanto se mancano le curve pluricanoniche della F_{2n} fino all'ordine $\left[\frac{2n}{3}\right]$, cioè se sono nulli i plurigeneri P_2, P_3, ... $P_{\left[\frac{2n}{3}\right]}$, la C_{2n} è affatto priva di curve aggiunte degli indici 2, 3, ...

Di qui si deduce (confrontando col resultato del n° 3):

Se per un piano doppio dotato di una curva di diramazione d'ordine $2n$, *sono nulli tutti i plurigeneri* P_2, P_3, ... $P_{\left[\frac{2n}{3}\right]}$, *il piano doppio è razionale o rappresenta una rigata.*

L'inversa è pur vera, giacchè è noto che ogni piano doppio (o superficie) che sia razionale o riferibile ad una rigata, ha nulli tutti i plurigeneri. Donde segue che la curva di diramazione del piano doppio mancherà delle curve aggiunte degli indici 2, 3, ... ; osservazione questa che (in virtù del processo di riduzione del n° 3) dimostra e completa il teorema del sig. Noether:

La curva di diramazione di un piano doppio razionale, o rappresentante una rigata, può sempre ridursi, mediante una trasformazione birazionale del piano, ad uno dei tipi seguenti:

1) *curva di un certo ordine* 2ν ($\nu \geqq 1$), *dotata di un punto multiplo di ordine* $\geqq 2\nu - 2$;

2) *quartica piana* C_4;

3) *sestica piana* C_6, *dotata di due punti tripli infinitamente vicini.*

5. Le condizioni di razionalità (o di riferibilità a rigata) di un piano doppio, espresse mediante l'annullarsi dei plurigeneri, si applicano con successo in alcuni casi notevoli, dove non sarebbe egualmente facile di riconoscere la trasformabilità della curva di diramazione del piano doppio in una delle curve tipiche di Clebsch-Noether.

Citiamo anzitutto il caso delle *superficie contenenti un fascio lineare*

di curve ellittiche dotato di (almeno) un punto base semplice o doppio, delle quali superficie si dimostra così che *sono razionali o riferibili a rigate ellittiche.*

Infatti, considerando un punto base, semplice o doppio, si può determinare razionalmente sopra ogni curva (ellittica) del fascio una g_2^1, e quindi rappresentare la superficie sopra un piano doppio. Ora i plurigeneri della superficie sono tutti nulli *), perchè il fascio in parola costituisce sulla superficie un sistema lineare di curve di *genere virtuale* π secantisi a due a due in $n > 2\pi - 2$ punti; (designando con $i_1, i_2, \ldots$ le molteplicità dei punti base del fascio si ha invero

$$\pi = 1 + \sum \frac{i(i-1)}{2} \quad \text{ed} \quad n = \sum i^2).$$

Nello stesso modo si ottiene il teorema:

Se una superficie contiene un fascio lineare di curve iperellittiche di genere $p > 1$, con un certo numero di punti base di molteplicità $i_1, i_2, \ldots$, per modo che si abbia

$$\sum i > 2p - 2,$$

la superficie è razionale o riferibile ad una rigata; una tale superficie essendo sempre rappresentabile sul piano doppio ed avendo i plurigeneri nulli.

Questi resultati estendono sotto un certo aspetto quelli già ottenuti relativamente alle superficie contenenti sistemi lineari di curve iperellittiche **), i quali possono riassumersi nel teorema di Castelnuovo: *Una superficie contenente una rete di curve iperellittiche di genere $p \geqq 1$, secantisi a due a due in gruppi non speciali, è razionale o riferibile ad una rigata.* Ma questo teorema, sotto un altro aspetto, dice di più, almeno nel caso $p > 2$.

Ora è interessante notare come anche l'ultimo teorema, in tutta la sua generalità, discenda dal resultato fondamentale di questa Nota, e possa così nuovamente dimostrarsi senza ricorrere alla razionalità delle involuzioni piane, di cui si fa uso nelle Note citate. Infatti, si dimostra subito (ad es. col ragionamento adoperato da Castelnuovo nella Nota dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, maggio 1894, pag. 477) che la

---

*) Cfr. la proprietà caratteristica delle curve canoniche, bicanoniche, etc. in Enriques, *Introduzione,* etc., §§ 38, 39.

**) Cfr.: Enriques (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, dicembre 1893); Castelnuovo (Ibidem, gennaio e maggio 1894). Un rifacimento di questi lavori si trova in Enriques, Mathematische Annalen, Bd. 46.

superficie contiene un fascio di curve razionali, o una serie razionale di curve razionali. Ora, nel primo caso i plurigeneri della superficie sono certo nulli; nel secondo caso poi risulta *) che la serie razionale di curve razionali è contenuta in un sistema lineare di curve dello stesso ordine e di un certo genere π, secantisi a due a due in $n > 2\pi - 2$ punti, donde segue nuovamente l'annullarsi dei plurigeneri; e così si può applicare sempre il resultato fondamentale della presente Nota.

6. Noteremo infine che il procedimento di riduzione spiegato al n° 2, ove pur si prescinda dalle speciali convenzioni riguardanti la molteplicità virtuale dei punti multipli della curva di diramazione di un piano doppio, dà la condizione perchè una curva piana (semplice o composta) sia trasformabile, con una trasformazione birazionale di tutto il piano, in un punto o in un gruppo di punti, questa condizione venendo espressa dalla mancanza di curve aggiunte d'indice 1, 2, ... Inoltre quel procedimento si rivela utilissimo nelle questioni di riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve di genere p secantisi a due a due in $n > 2p - 2$ punti, ove si noti che le curve aggiunte d'indice 1, 2, 3, ... dovranno segare la curva generica del sistema dato in gruppi composti di un numero di punti che va decrescendo (di almeno $n - 2p + 2$ unità per volta) col crescere dell'indice. Così ad es., per un sistema lineare (almeno ∞^1) di curve razionali si vede subito che mancano tutte le curve aggiunte d'indice 1, 2, ..., e si ottengono quindi i notissimi tipi d'ordine minimo pei detti sistemi lineari. Similmente per $p = 1$ ed $n > 0$ si avrà soltanto una curva aggiunta e mancheranno tutte le successive, sicchè si arriverà facilmente ai tipi pure notissimi dei sistemi lineari di curve ellittiche, ecc.

Si potrebbe anzi stabilire una serie di proposizioni generali sui tipi dei sistemi lineari di curve di genere p secantisi a due a due in n punti, ove si abbia rispettivamente $n > 4p - 4$, o $2n > 6p - 6$, $3n > 8p - 8, \ldots$; ma lasciamo al lettore volenteroso la cura di proseguire in questo indirizzo.

Ottobre 1900.

G. CASTELNUOVO.
F. ENRIQUES.

*) Humbert, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e serie, t. X (1894), pag. 195; Enriques, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIII (1899).

ESTRATTI DAI VERBALI

[*Vedi* t. XIII, pp. 374-380].

Per le pubblicazioni ricevute in dono e presentate nelle varie Adunanze, veggasi la Seconda Parte (Biblioteca Matematica).

ADUNANZA DEL 9 LUGLIO 1899. (Presidenza G. B. Guccia).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il sig. Michele Martone (Messina), proposto dai soci Vivanti e Ciani, è eletto *socio non residente*.

ADUNANZA DEL 23 LUGLIO 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Il PRESIDENTE dà il triste annuncio della morte del socio residente Dr. Fortunato Bucca.

Memorie e Comunicazioni.

DE FRANCHIS: *Fortunato Bucca.*

Il rimpianto che ha destato la sua fine in tutti quelli che s'occupano di Scienze Matematiche e che erano in intimità con Lui ha salde radici nelle speranze che tutti riponevamo nel suo ingegno profondo, seriamente coltivato da forti studi, il quale faceva presagire in Lui un ricercatore, per quanto paziente, altrettanto perspicace. E che queste speranze fossero fondate, ne fanno fede i lavori che, anni fa, appena laureato, Egli pubblicò a parte *) e che poi con leggere modificazioni furono riprodotti nei nostri Rendiconti **), e quegli altri che, dopo la di Lui immatura fine, rimasero inediti.

Di Lui possono ben parlare solo gli amici intimi, i quali conobbero ed apprezzarono le doti speculative del suo robusto ingegno, e lo stimarono per la sua larga cultura e per la precisione insuperabile delle sue idee. Perchè, di natura eminentemente riflessiva e timida, Egli ebbe sempre ritegno a manifestare idee che non fossero completamente precisate, e non era mai contento della soluzione d'un problema scientifico, se non quando esso fosse completamente risoluto e discusso in tutti i suoi più minuti particolari. Ed è forse per questo, sempre ammirevole, riserbo, che i suoi lavori, benchè molto pregevoli, non bastano ancora da soli a rivelarci integralmente la sua straordinaria perspicacia ed il suo talento: bisognava, ripeto, avere con Lui l'intimità di un amico, per aver l'agio di apprezzarlo completamente e per rendersi esatto conto di quanto potesse il suo ingegno.

*) *Sullo sviluppo d'una funzione monogena uniforme d'una variabile indipendente in serie colle caratteristiche separate* (litogr., 1896); e *Intorno all'integrale di Cauchy* (litogr., 1896); queste due sono il riassunto della sua dissertazione di Laurea (laurea che ottenne, colla lode, nella R. Università di Palermo, il 6 luglio 1896).

**) *Sullo sviluppo d'una funzione uniforme di variabile complessa, dotata di singolarità isolate, in serie colle caratteristiche separate* (questi Rendiconti, t. XI, 1897); *Sopra certi integrali e certi sviluppi in serie* (Ibid., t. XII, 1898).

Zelante in tutto ciò che significasse *dovere*, lo abbiamo visto adempiere con ogni scrupolo al suo ufficio di Assistente alla Cattedra di Analisi superiore nella R. Università di Palermo. L'amore disinteressato che poneva nel trattare, minutamente e rigorosamente, le questioni, e la sua fibra di forte ed intelligente studioso gli valsero sempre l'illimitato affetto e la stima dei Professori e degli studenti. E noi soci del Circolo lo vedemmo per parecchi anni tenere la carica di Bibliotecario, in cui Egli diede prova di tutto lo zelo che la sua delicata anima credeva indispensabile a così delicato ufficio.

Ed ora il povero nostro amico, a soli 24 anni, all'alba della vita, ci venne rapito da un male crudele. Triste, pur troppo!

GUCCIA si associa alle parole dette dal Dr. de Franchis in memoria del Dr. Fortunato Bucca, e nella qualità di «Delegato dal Consiglio Direttivo per dirigere la pubblicazione dei Rendiconti» fa conoscere che gli ultimi scritti del compianto e valente giovane matematico, e cioè:

Sullo sviluppo degli integrali d'un'equazione differenziale lineare omogenea nell'intorno d'un punto singolare;

Sulla riduzione del gruppo di Galois d'un'equazione algebrica coll'aggiunzione di irrazionalità arbitrarie;

Sulle espressioni algebriche costruibili geometricamente colle sole coniche o con curve di ordine superiore al secondo;

Sulla irrazionalità icosaedrica;

Sulla riduttibilità delle equazioni binomie,

saranno pubblicati nel tomo XIV (1900) dei Rendiconti *).

PIZZETTI: *Sulla correzione da fare alle latitudini osservate per tener conto dell'altezza dei punti di stazione sul livello del mare.*

CIANI: *Un teorema sopra il covariante S della quartica piana.*

ADUNANZA DEL 13 AGOSTO 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

APPELL: *Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau.*

KORTEWEG: *Extrait d'une Lettre à M. Appell.*

PETROVITCH: *Sur l'expression du terme général des séries de Taylor représentant des combinaisons rationnelles de la fonction exponentielle.*

PETROVITCH: *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre.*

DE FRANCHIS: *Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere geometrico-superficiale nullo.*

---

*) *Vedi*: Bucca, *Studii di Analisi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIV (1900), pp. 115-141].

ADUNANZA DEL 27 AGOSTO 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

GERBALDI: *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane.* (Parte seconda).

ADUNANZA DEL 12 NOVEMBRE 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — Con lettera del 26 ottobre 1899 il sig Ing. S. Rotigliano si dimette da socio del Circolo.

Affari interni.

ADUNANZA DEL 26 NOVEMBRE 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 10 DICEMBRE 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il sig. Pasquale Calapso (Palermo), proposto dai soci Gerbaldi e Guccia, è eletto *socio residente.*

Memorie e Comunicazioni.

PINCHERLE: *Sopra un problema d'interpolazione.*

ADUNANZA DEL 24 DICEMBRE 1899. (Presidenza F. Gerbaldi).

Ammissione di nuovi soci.—Dietro votazione a schede segrete il prof. Ernesto Pascal (Pavia), proposto dai soci del Pezzo e Gerbaldi, è eletto *socio non residente.*

ADUNANZA STRAORDINARIA DEL 7 GENNAJO 1900, a' sensi dell'articolo 15 dello Statuto. (Presidenza F. Caldarera).

Elezione dell'Ufficio di Presidenza pel biennio 1900-1901.—Il PRESIDENTE richiama gli articoli 14 e 15 dello Statuto relativi all'elezione e alle funzioni dell'Ufficio di Presidenza. Si procede quindi alla votazione a scrutinio segreto, con unica scheda, per le cariche dell'Ufficio di Presidenza pel biennio 1900-1901. Risultano eletti: Caldarera, presidente; Maisano, vice presidente; Gerbaldi e Guccia, segretari; de Franchis e Pepoli, vice segretari; Porcelli, tesoriere.

Affari interni. — Il socio prof. Gebbia regala alla Biblioteca del Circolo « *La Théorie des déterminants et leurs applications*, par F. BRIOSCHI, traduit par M. ÉD COMBESCURE ». Su proposta del socio prof. Gerbaldi, si delibera di ringraziare il prof. Gebbia.

Memorie e Comunicazioni.

VIVANTI: *Sulla trasformazione di Laplace.*

ADUNANZA DEL 14 GENNAJO 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — Con lettera del 10 corr. il prof. E. Pascal ringrazia per

la sua ammissione a socio del Circolo. — Con lettera del 25 dicembre 1899 il dottore Pietro Visalli si dimette da socio del Circolo.

Affari interni.

ADUNANZA STRAORDINARIA DEL 21 GENNAJO 1900, a' sensi dell'articolo 18 dello Statuto. (Presidenza F. Caldarera).

Alle ore 15 precise il PRESIDENTE apre l'adunanza.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il sig. Enrico Lugaro (Palermo), proposto dai soci Torelli e Gerbaldi, è eletto *socio residente*.

Elezione del Consiglio Direttivo pel triennio 1900, 1901, 1902.

[*Vedi* t. XI, pp. 184-186].

Il PRESIDENTE richiama gli articoli 16, 17, 18, 19, 20, 32, 33 dello Statuto, relativi alla elezione e alle funzioni del Consiglio Direttivo (Comitato di Redazione dei *Rendiconti*). Il PRESIDENTE constata che le lettere per la elezione del Consiglio Direttivo pervenute all'Ufficio di Presidenza fino alle ore 15 di oggi 21 gennajo 1900 sono in numero di 82. Quattro di queste lettere sono dichiarate *nulle* perchè non firmate nel retro. Le rimanenti 78 portano la firma dei soci:

Agnello, Alagna, Amanzio, Amici, Amodeo, André, Basile, Bernoiari, Bonnade, Bordiga, Bortolotti, Bourlet, Brambilla, Breglia, Burgatti, Calapso, Caldarera, Capelli, Cerruti, Certo, Conoscente, Correnti, Costa, Cremona, Daniele, De Franchis, Del Giudice, Del Pezzo, Del Re, D'Ovidio, Durán Loriga, Enriques, Fano, Fazzari, Fouret, Galdeano (de), Gebbia, Gerbaldi, Giudice, Guccia, Guerra, Gyldén, Jadanza, Kerbedz (de), Laisant, Levi-Civita, Lo Monaco Aprile, Loria, Maisano, Martone, Massarini, Medolaghi, Miceli, Murer, Neppi Modona, Pascal, Peano, Pennacchietti, Pincherle, Pintacuda, Piuma, Politi, Porcelli (O.), Porcelli (S.), Puglisi, Rindi, Ronco, Ruffini, Russo, Schlegel, Somigliana, Tagliarini, Terzi, Torelli, Traverso, Venturi, Verde, Volterra.

Aperte dal PRESIDENTE queste 78 lettere, si sono trovate altrettante buste piccole chiuse. Aperte dal PRESIDENTE le anzidette 78 buste piccole, si sono trovate altrettante schede di votazione. Fattone lo spoglio dal PRESIDENTE, assistito dai Segretari, si è avuto il risultato seguente:

Soci del Circolo (addì 21 gennajo 1900) 183 — Votanti 78.

RESIDENTI.

Albeggiani	eletto	con	voti	70
Gebbia	»	»	»	72
Gerbaldi	»	»	»	77
Guccia	»	»	»	77
Torelli	»	»	»	76.

Riportarono inoltre voti:

Angelitti 4 — De Franchis 1 — Maisano 6 — Venturi 7. — Dispersi 2.

NON RESIDENTI.

Beltrami (Roma)	eletto con voti 78
Bianchi (Pisa)	» » » 77
Capelli (Napoli)	» » » 75
Cerruti (Roma)	» » » 76
Cremona (Roma)	» » » 77
Del Pezzo (Napoli)	» » » 71
Del Re (Napoli)	» » » 63
Loria (Genova)	» » » 65
Mittag-Leffer (Stoccolma)	» » » 72
Pascal (Pavia)	» » » 72
Peano (Torino)	» » » 73
Pincherle (Bologna)	» » » 72
Poincaré (Parigi)	» » » 75
Tonelli (Roma)	» » » 69
Volterra (Torino)	» » » 69.

Riportarono inoltre voti :

Arzelà 1 — Bertini 9 — Berzolari 2 — Burali-Forti 1 — Castelnuovo 3 — D'Ovidio 11 — Enriques 1 — Jung 4 — Montesano 2 — Morera 10 — Pennacchietti 1 — Picard 2 — Ricci 2 — Salvatore-Dino 2 — Segre 13 — Somigliana 1 — Veronese 7 — Vivanti 2. — Dispersi 3.

Il PRESIDENTE proclama il risultato della votazione. Approvato dall'Assemblea il presente verbale, la seduta è tolta alle ore 18.

ADUNANZA DEL 28 GENNAJO 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Il PRESIDENTE comunica ai soci che dopo la seduta straordinaria del 21 gennajo, destinata, a' sensi dello Statuto, alla elezione del Consiglio Direttivo, pervennero alla Presidenza altre 4 buste con l'intestazione « Elezione del Consiglio Direttivo pel triennio 1900-1901-1902 », e cioè: *una* senza firma e *tre* con le firme dei soci Castelli, Floridia e Perna. Si delibera di bruciare queste 4 buste.

ADUNANZA DELL'11 FEBBRAJO 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Il PRESIDENTE partecipa ai soci che il nuovo Consiglio Direttivo ha scelto il prof. G. B. Guccia quale « Delegato per dirigere la pubblicazione dei Rendiconti » pel triennio 1900-1901-1902. [Vedi art. 20 dello Statuto].

Ammissione di nuovi soci.—Dietro votazione a schede segrete, il sig Francesco Guggino (Palermo), proposto dai soci Gebbia e Gerbaldi, è eletto *socio residente*.

Memorie e Comunicazioni.

SEVERINI : *Sulla rappresentazione delle funzioni reali di variabili reali mediante serie di polinomi razionali interi.*

PROSPETTO DEI "CONTI CONSUNTIVI DEL

approvati nelle adunanze degli 11-1-1885; 24-1-1886; 13-2-1887; 8-1-1888; 27-1-1889

	CATEGORIE		1884		1885		1886		
INTROITI	Contribuzioni dei Soci	L.	635	»	671	75	980	»	9
	Versamenti dei Soci perpetui [1])	»	»	»	»	»	»	»	
	Sussidii diversi [2]	»	»	»	»	»	»	»	
	Rimborsi per Estratti	»	»	»	»	»	373	88	(
	Vendita dei Rendiconti	»	»	»	»	»	»	»	
	Introiti diversi	»	»	»	»	»	10	»	
	Resto di Cassa dell'Esercizio precedente . .	»	»	»	176	77	»	»	
	Introiti dell'Esercizio	L.	635	»	848	52	1363	88	1
	Deficienza dell'Esercizio	L.	»	»	54	54	35	59	·
	A pareggio	L.	635	»	903	06	1399	47	2
ESITI	Pigione di casa e manutenzione di mobili [3]).	L.	4	»	1	»	10	»	
	Ammobigliamento	»	»	»	»	»	»	»	
	Biblioteca ed Archivio	»	256	13	449	81	305	94	
	Spese d'Ufficio	»	198	10	68	67	92	91	
	Stampa dei Rend. degli Estratti e degli Annuari	»	»	»	339	95	899	48	1
	Spedizione dei Rendiconti e degli Annuari .	»	»	»	43	63	36	60	
	Illuminazione	»	»	»	»	»	»	»	
	Assicurazione incendio	»	»	»	»	»	»	»	
	Esiti diversi	»	»	»	»	»	»	»	
	Deficienza dell'Esercizio precedente	»	»	»	»	»	54	54	
	Esiti dell'Esercizio	L.	458	23	903	06	1399	47	2
	Resto di Cassa dell'Esercizio	L.	176	77	»	»	»	»	
	A pareggio	L.	635	»	903	06	1399	47	2

[1]) Guccia, Halsted, Humbert, Jordan. In esecuzione di deliberazione dell'Assemblea (adunanza straor Circolo (vedi Esiti, categ. « Ammobigliamento », anno 1897).

[2]) *Ministero dell'istruzione Pubblica*: anno 1888, L. 300; 1889, L. 700; 1890, L. 700; 1891, L. 700; 1892, 1895, L. 500; 1896, L. 500; 1897, L. 500; 1898, L. 500; 1899, L. 500. Totale L. 4400. — *Prof. G. B. Guccia*

3) Dalla fondazione della Società (2 marzo 1884) e fino al 31 agosto 1896 non si pagò pigione di casa,

Palermo, 26 giugno 1900.

IATICO DI PALERMO DEGLI ESERCIZII 1884-1899 „

1-1-1893; 11-3-1894; 27-1-1895; 26-1-1896; 14-2-1897; 15-6-1897; 30-1-1898; 15-1-1859; 26-6-1900.

	1891		1892		1893		1894		1895		1896		1897		1898		1899		Totale	
»	2288	33	2381	56	2294	38	2345	28	2455	01	2482	62	2600	61	2504	04	2694	97	31613	55
»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1200	»	»	»	»	»	1200	»
»	1000	»	800	»	500	»	1240	»	500	»	500	»	1875	40	865	»	1728	90	11309	30
06	345	75	366	28	443	04	181	60	445	15	240	70	198	95	349	50	319	39	5156	55
50	240	»	216	»	266	80	150	»	263	25	443	»	267	»	711	75	589	»	3464	70
»	38	80	10	80	14	25	74	70	30	05	18	»	13	»	42	48	72	56	383	78
»	85	48	287	89	348	76	285	66	186	70	115	50	»	»	459	79	109	»	2055	55
56	3998	36	4062	53	3867	23	4277	24	3880	16	3799	82	6154	96	4932	56	5513	82	55183	43
»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	38	81	»	»	»	»	»	»	1339	27
56	3998	36	4062	53	3867	23	4277	24	3880	16	3838	63	6154	96	4932	56	5513	82	56522	70
»	50	70	53	»	56	75	56	»	56	»	44	»	461	50	433	»	712	»	1977	45
»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1470	40	»	»	»	»	1470	40
35	439	77	318	39	199	80	227	05	212	85	242	35	247	45	277	55	1139	46	5422	89
73	295	38	594	34	523	99	504	36	671	39	643	30	607	35	974	98	715	24	6615	34
38	2675	25	2460	»	2521	57	3026	25	2567	39	2598	»	2533	99	2728	23	2016	75	33366	05
41	234	37	207	79	252	71	261	88	242	03	288	23	282	47	358	20	303	54	3369	37
»	15	»	15	»	15	»	15	»	15	»	15	»	16	80	19	20	6	08	132	08
»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	32	40	32	40	32	40	97	20
»	»	»	65	25	11	75	»	»	»	»	7	75	4	»	»	»	»	»	88	75
21	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	38	81	»	»	»	»	1339	27
08	3710	47	3713	77	3581	57	4090	54	3764	66	3838	63	5695	17	4823	56	4925	47	53878	80
48	287	89	348	76	285	66	186	70	115	50	»	»	459	79	109	»	588	35	2643	90
56	3998	36	4062	53	3867	23	4277	24	3880	16	3838	63	6154	96	4932	56	5513	82	56522	70

i L. 300 × 4 = L. 1200 fu portato ad introito nell'esercizio 1897 per provvedere, in parte, alle spese di ammobigliamento del

„ 728,90. Totale L. 5408,90.—*Municipio di Palermo*: anno 1889, L. 300; 1890, L. 300; 1891, L. 300; 1893, L. 500; 1894, L. 500; 40; 1898, L. 365; 1899, L. 500. Totale L. 1500,40.

mente apprestati dal socio prof. Guccia.

Il socio Tesoriere: Ing. **S. Porcelli.**

ADUNANZA DEL 25 FEBBRAJO 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Il Presidente con profondo rammarico dà il triste annuncio della morte, avvenuta in Roma il 18 corrente febbrajo, alle ore 14,30, del prof. Eugenio Beltrami, socio e membro del Consiglio Direttivo del Circolo fin dal 1888; e dà lettura dei telegrammi spediti ai professori Cerruti, Cremona e Tonelli, della R. Università di Roma, per pregarli di rassegnare alla famiglia del compianto e illustre matematico italiano le condoglianze del Circolo Matematico di Palermo e rappresentare questa Società alle onoranze funebri che saranno rese in Roma.

Su proposta del Presidente e dei soci Gerbaldi e Conoscente il Circolo delibera di esprimere le sue condoglianze al prof. Guccia per la grave perdita da questi fatta del suo amato genitore, Cav. Giuseppe Maria Guccia dei Marchesi di Ganzaria, cessato di vivere, in Palermo, alle ore 13 e mezzo del giorno 20 del corrente febbrajo.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il sig. Ernest Lebon (Paris), proposto nell'adunanza precedente dai soci Guccia e Conoscente, è eletto *socio non residente.*

ADUNANZA DELL'11 MARZO 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

PUGLISI: *Sul movimento di un punto non soggetto ad alcuna forza sopra un toro.*

ADUNANZA DEL 25 MARZO 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni.

ADUNANZA DELL'8 APRILE 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

BURGATTI: *Teoria dei sistemi articolati più semplici.*

ADUNANZA DEL 22 APRILE 1900. (Presidenza F. Gerbaldi).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 13 MAGGIO 1900. (Presidenza F. Gerbaldi).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 27 MAGGIO 1900. (Presidenza F. Gerbaldi).

Su proposta del Presidente dell'adunanza e dei soci Guccia e Conoscente il Circolo delibera di esprimere le sue condoglianze al presidente della Società, professore comm F. Caldarera, per la grave perdita da questi fatta della sua diletta consorte, cessata di vivere, in Palermo, il giorno 23 del corrente maggio.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il sig. Dottore Giuseppe Vitali, proposto dai soci Bianchi e Guccia, è eletto *socio non residente.*

Memorie e Comunicazioni.

VITALI: *Sulle funzioni analitiche sopra le superficie di Riemann.*

VITALI: *Sui limiti per $n = \infty$ delle derivate n^{me} delle funzioni analitiche.*

ADUNANZA DEL 10 GIUGNO 1900. (Presidenza F. Gerbaldi).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il signor Ing. Guido Toja (Firenze), proposto dai soci Cerruti e Burgatti, è eletto *socio non residente.*

ADUNANZA DEL 24 GIUGNO 1900 (Presidenza G. B. Guccia).

Corrispondenza. — Il sig. Ing Guido Toja, con lettera del 13 giugno 1900, ringrazia per la sua ammissione a socio del Circolo.—Con lettera del 18 giugno 1900 la signorina Frances Hardcastle si dimette da socia del Circolo, a partire dal 1° gennajo 1901.

Memorie e Comunicazioni.

MITTAG-LEFFLER: *Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable réelle* (Extrait d'une Lettre à M. Émile Picard).

PUGLISI: *Sulle formole per la composizione di più movimenti finiti.*

ADUNANZA STRAORDINARIA DEL 26 GIUGNO 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Bilanci. — Esposizione ed approvazione del *Conto consuntivo dell'esercizio 1899.* reso dal Tesoriere, e del *Bilancio di previsione per l'esercizio 1900.*

Si delibera la pubblicazione nei Rendiconti del « *Prospetto dei Conti consuntivi del Circolo Matematico di Palermo dal 2 marzo 1884 al 31 dicembre 1899* » [Vedi: pp. 308-309].

ADUNANZA DELL'8 LUGLIO 1900. (Presidenza G. B. Guccia).

Memorie e Comunicazioni.

PHRAGMÉN: *Sur la représentation analytique des fonctions réelles, données sur un ensemble quelconque de points.* (Extrait d'une Lettre à M. G. B. Guccia).

ADUNANZA DEL 22 LUGLIO 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — Con lettera del 15 luglio 1900 l'Ing. Cav. Gino della Rocca si dimette da socio del Circolo.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il signor Prof. Comm. Ulisse Dini, senatore del Regno, proposto dai soci Cremona e Tonelli, è eletto *socio non residente.*

ADUNANZA DEL 12 AGOSTO 1900. (Presidenza G. B. Guccia).

Si toglie la seduta in segno di lutto per la morte di S. M. Umberto I° re d'Italia.

ADUNANZA DEL 26 AGOSTO 1900. (Presidenza G. B. Guccia).

Affari interni.

ADUNANZA DELL'11 NOVEMBRE 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — Con lettera del 17 ottobre 1900 il sig. Dottore Filiberto Castellano si dimette da socio del Circolo.

ADUNANZA DEL 25 NOVEMBRE 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 9 DICEMBRE 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il sig. Cristoforo Alasia de Quesada (Tempio), proposto dai soci Guccia e Gerbaldi, è eletto socio *non residente*, a partire dal 1° gennajo 1900.

Memorie e Comunicazioni.

CASTELNUOVO e ENRIQUES: *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi.*

ADUNANZA DEL 23 DICEMBRE 1900. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — Con lettera del 22 dicembre 1900 il sig. Ingegnere Domenico Saladino si dimette da socio del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

SEVERINI: *Aggiunta alla Memoria « Sulla rappresentazione delle funzioni reali di variabili reali mediante serie di polinomi razionali interi »* [questi Rendiconti, t. XIV (1900), p. 157].

A pag. 171 si ponga dapprima che le funzioni $f_1(\bar{x}+\bar{l}u, y)$ e $\psi(u)$ non assumano mai valori negativi per i valori di u e di y, corrispondenti ai punti del campo C'; in fine si aggiunga l'osservazione che la disuguaglianza

$$L'' - l'' < g(G' + G'')$$

è egualmente vera, se non si fa l'ipotesi ora detta, il che subito si vede.

F. G., G. B. G.

ERRATA-CORRIGE.

PAGINA.	LINEA.	IN LUOGO DI:	LEGGERE:
IV	20	comunicati	comunicate
V	2	**Delle adunanze**	**Della Biblioteca**
XII	27	**Barak**	**Barack**
XXV	3	**Petrovich**	**Petrovitch**
XXVIII	10	**Studnikčka**	**Studnička**
XXXV	15	Liepzig	Leipzig
33	4	15	13
59	29	trasformazioue	trasformazione
136	20	IV	V
208	35	*analitique*	*analytique*
253	27	convenientemeute	convenientemente

INDICE

ESTRATTI DAI VERBALI

MEMORIE E COMUNICAZIONI

INDICE GENERALE

Fine della Parte 1ª del Tomo XIV (1900).

Tipografia Matematica di Palermo
11, via Villareale.

Fig. 1.

Fig. 9

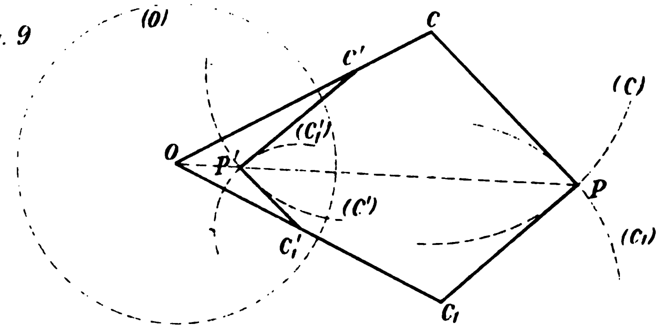
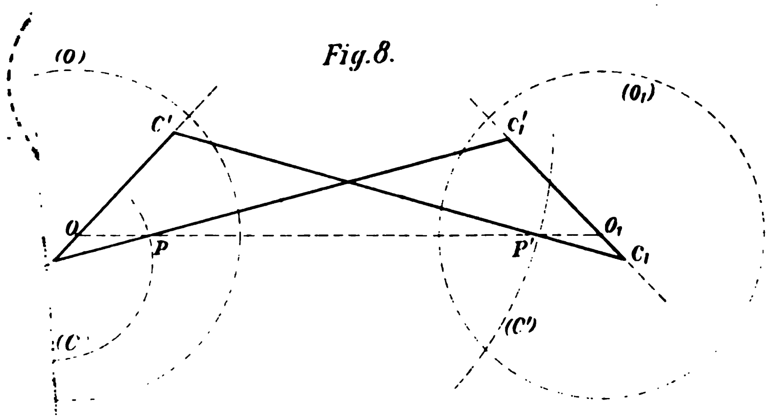


Fig.

Fig. 8.



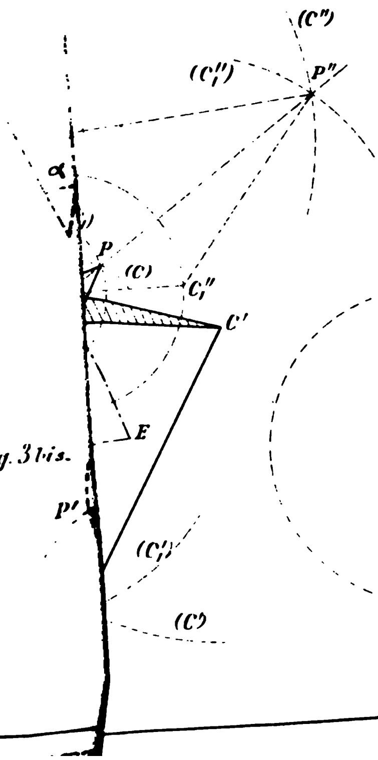
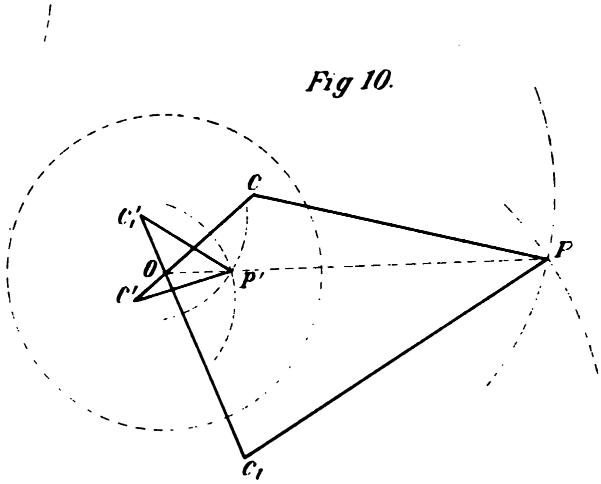


Fig. 3 bis.

Fig 10.



Lit. P Casetti e C. via Lata

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XIV (1900), parte 2ª. — Stampato il 16 aprile [illegible]

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO XIV. — ANNO 1900.

PARTE SECONDA: BIBLIOTECA MATEMATICA.

PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ
28, via Ruggiero Settimo, 28.

1900

BIBLIOTECA MATEMATICA

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO.

XVII° Elenco: (gennajo 1899 - dicembre 1900).

[*Vedi* gli Elenchi precedenti: t. XI, pp. 1-11 e *retro*].

Accademia Peloritana. — CCCL° Anniversario della Università di Messina — *Messina,* 1900.

Alagna, R. (Palermo). [*Vedi* t. XI, pag. 83]. Delle congruenze binomie rispetto ad un modulo primo p o ad una potenza di esso, nel caso in cui $\frac{p-1}{2}$ sia un numero primo, ovvero il doppio di un numero primo. *Rend. Circ. Matem.,* XIII, 1899.

Alexandroff, I. (Tambov). Problèmes de Géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution. Traduit du russe, sur la sixième édition, par D. Aitoff. Paris, 1899.

Alibrandi, P. (Roma). Sulla elasticità dei solidi complicata da variazioni di temperatura. *Giornale di Battaglini,* XXXVIII, 1900.

Amodeo, F. (Napoli). [*Vedi* t. XIII, pag. 1]. Spazio normale e genere massimo delle curve di ordine m, k-gonali, di specie s. *Rend. Acc. Napoli,* 1898.

— Aritmetica particolare e generale. — Volume Primo degli « Elementi di Matematica ». Napoli, 1900.

— Curve di gonalità k con punti fissi nella $(k-1)^{\text{esima}}$ serie canonica e curve normali trigonali del piano. *Rend. Acc. Napoli,* 1900.

— Uno sguardo alle curve algebriche in base alla gonalità. *Periodico di Matematica,* t. XVI, 1900.

Andoyer, H. (Paris). Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure à l'usage des Facultés des sciences. Tome I, Paris, 1900.

Angelitti, F. (Palermo). Sull'anno della visione dantesca. *Bull. Società Dantesca Italiana,* Nuova serie, vol. VI, fasc. 7°.

Astronomi Italiani. All'astronomo G. V. Schiaparelli. Omaggio. 30 Giugno 1860-30 Giugno 1900. Milano, Stab. Menotti Bassani e C., 1900.

Bachelier, L. (Paris). Théorie de la spéculation. Paris, 1900.

Bardelli, G. (Milano). [*Vedi* t. XI, pag. 84]. Sui momenti d'inerzia dei solidi di rotazione. *Rend. Ist. Lombardo*, $XXXII_2$, 1899.

Bashforth F. (Horncastle). Replica di Krupp alla Protesta del Sig. Bashforth, translated with Notes. Cambridge, 1898.

— A second supplement to a revised account of the experiments made with the Bashforth Chronograph. Cambridge, 1900.

Bertrand, J. Traité d'Algèbre. 1ère Partie. Paris, 1873.

— Traité d'Algèbre. 2ème Partie. Paris, 1870.

Berzolari, L. (Pavia). [*Vedi* t. XIII, pag. 1]. Sur les faisceaux de formes binaires cubiques, pour lesquels on donne une forme du faisceau syzygétique déterminé par la jacobienne. *Mathem. Annalen*, LI, 1899.

— Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche. *Rend. Istit. Lombardo*, Nota 1ª e 2ª $XXXIII_2$, 1900.

Bettazzi, R. (Torino). [*Vedi* t. XIII, pag. 2]. Sulla definizione del numero. *Periodico di Matematica*, XV, 1899.

— L'application dans l'enseignement de la mathématique. *L'enseignement Mathématique*, II, 1900.

Borel, E. (Paris). [*Vedi* t. XIII, pag. 2]. Leçons sur les fonctions entières. [Nouvelles Leçons sur la théorie des fonctions]. Paris, 1900.

Bortolotti, E. (Modena). [*Vedi* t. VII, pag. 2]. Sulla convergenza degli algoritmi periodici e sulla risoluzione approssimata delle equazioni algebriche. Bologna, 1899.

Boyer, J. (Paris). Histoire des Mathématiques, illustrée des facsimilés de manuscrits et de portraits. Paris, 1900.

Brambilla, A. (Napoli). [*Vedi* t. XIII, pag. 2]. Sopra una classe di superficie e di varietà razionali. *Atti Acc. Napoli*, IX_2, 1898.

Brill, A. (Tübingen). [*Vedi* t. XIII, pag. 2]. Ueber die Mechanik von Hertz. *Mitteilungen des math.-naturw. Vereins in Wurttemberg*, II_2, 1900.

Brioschi, F. [*Vedi* t. XI, pag. 84]. Théorie des déterminants et leurs principales applications. Traduit par M. Éd. Combescure. Paris, 1856.

Bucca, F. (Palermo). [*Vedi* t. XIII, pag. 2]. Sulla riduzione del gruppo di Galois d'un'equazione algebrica coll'aggiunzione di irrazionalità arbitrarie. Palermo, 1899.

— Sulla riduttibilità delle equazioni binomie. Palermo, 1899.

— Sullo sviluppo degli integrali di un'equazione differenziale lineare omogenea nell'intorno d'un punto singolare. Palermo, 1899.

Burali-Forti, C. (Torino). [*Vedi* t. XIII, pag. 2]. Les propriétés formales des opérations algébriques. *Revue de Mathém.*, VI, 1899.

— Calendario perpetuo Gregoriano (Estratto dalle *Lezioni di Geometria Pratica*, 2ª Edizione).

— Sui simboli di Logica Matematica. Nota 1ª, 2ª e 3ª. *Il Pitagora*, anno VI, 1900.

Burattini, T. L. Misura universale. *Wydział Mat.-Przyr. Ak. Umiejętn.*, 1897.

Burgatti, P. [*Vedi* t. XIII, pag. 3]. Sopra alcune formole fondamentali relative alle congruenze di rette. *Rend. Acc. Lincei*, VIII$_5$, 1899.

— Sul moto di un pendolo verticale, il punto di sospensione del quale è soggetto a movimenti oscillatori, e sulla determinazione di questi movimenti. *Rend. Acc. Lincei* (Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali) Serie 5ª, vol. IX, 2° sem. 1900.

Cahen, E. (Paris). Éléments de la théorie des nombres. — [Congruences. Formes quadratiques. Nombres incommensurables. Questions diverses]. Paris, 1900.

Caldarera, F. (Palermo). [*Vedi* t. XI, pag. 85]. Primi fondamenti della Geometria del piano. Palermo, 1891.

— Sull'equazioni lineari ricorrenti trinomie, ed applicazione. *Giornale di Battaglini*, XXXV, 1897.

— Meccanica razionale. Vol. I. Palermo, 1900.

Capelli, A. (Napoli). [*Vedi* t. XIII, pag. 3]. Alcune osservazioni sugl'integrali comuni a due sistemi di equazioni differenziali. *Rend. Acc. Napoli*, 1900.

— Sull'ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell'aritmetica. *Ibid.*, 1900.

Cassa (La) di Risparmio Vittorio Emmanuele in Palermo alla Esposizione Generale Italiana di Torino, 1898. Palermo, 1898.

— Resoconto dell'anno 1898. Palermo, 1898.

— Intorno alla fondazione della Cassa Centrale di Risparmio Vittorio Emmanuele. Appunti e Documenti pubblicati per l'Esposizione Universale di Parigi nel 1900. Palermo, 1900.

— Album grafico-statistico del movimento economico-patrimoniale 1862-1898. Palermo, 1900.

— Resoconto dell'anno 1899. Palermo, 1900.

Conti, A. (Bologna). Elementi di Aritmetica razionale ad uso degli allievi delle Scuole Normali (2° e 3° corso). Parte Prima (contenente lo svolgimento del programma del 2° corso normale). Bologna, 1900.

— Elementi di aritmetica razionale ad uso degli allievi delle Scuole Normali (2° e 3° corso). Parte Seconda (contenente lo svolgimento del programma del 3° corso normale). Bologna, 1901.

Cremona, L. (Roma). [*Vedi* t. I, pag. 34 e 101]. Commemorazione del prof. Eugenio Beltrami. *Rend. Acc. Lincei*, seduta solenne del 10 giugno 1900. Roma, 1900.

Daniele, E. (Torino). Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili. *Memorie Acc. Torino*, L$_2$, 1899-900.

Davisson, C. Ueber die Geodätische Linie der Mannigfaltigkeit

$$d s^2 = d x^2 + \sin^2 x \, d y^2 + d z^2 .$$

Tübingen, 1900.

Del Re, A. (Modena). [*Vedi* t. XIII, pag. 3]. Sopra alcuni complessi omaloidi di sfere. *Rend. Acc. Lincei*, VIII$_5$, 1899.

De Sanctis, L. (Teramo). Alcuni nuovi teoremi sulle funzioni armoniche a tre variabili. *Ann. di Matem.*, Serie III, Tomo IV, 1900.

D'Ovidio, E. (Torino). [*Vedi* t. XI, pag. 86]. Geometria analitica. Parte I, Torino, 1885.

Duhamel, M. Éléments de Calcul infinitésimal. Tomes I et II. Paris, 1860-61.

Duporcq, E. (Paris). Premiers principes de Géométrie moderne. Paris, 1899.

Fisher, G. E. and Schwatt, I. J. (Phyladelphia). Text-Book of Algebra, with exercises, for secondary Schools and Colleges. Phyladelphia, 1898.

Fitz-Patrick, J. et Chevrel, G. Exercices d'Arithmétique. 2ème édition. Paris, 1900.

Giudice, F. (Genova). [*Vedi* t. XIII, pag. 4]. Angolo di due rette e di due piani. Perpendicolarità e parallelismo in coordinate omogenee. *Atti Acc. Torino*, XXXIV, 1899.

— Geometria solida. Brescia, 1900.

Halsted, G. B. (Austin, U. S. A.). [*Vedi* t. XIII, p. 5]. Non Euclidean-Geometry for Teachers Popular Astronomy.

— Non Euclidean-Geometry for Teachers.

Hesse, L. O. [*Vedi* t. XIII, pag. 5]. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. Leipzig, 1873.

Jamshedji, Ed. (Ahmedabad). Reciprocal Polygons. Ahmedabad, 1898.

— Associated Conic. Ahmedabad, 1898.

Kiepert, L. (Hannover). [*Vedi* t. XIII, pag. 6]. Grundriss der Differential-und Integral-Rechnung. II. Theil: *Integral-Rechnung*. Siebente verbesserte und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. Max Stegemann. Hannover, 1900.

Lampe, E. (Berlin). [*Vedi* t. XIII, pag. 6]. Die reine Mathematik in den Jahren 1884-1899 nebst Actenstücken zum leben von S. Aronhold. Berlin, 1899.

Laurent, H. (Paris). [*Vedi* t. IX, pag. 4]. L'Élimination. *Collection Scientia.* Paris, 1900 (n° 7).

Lazzeri, G. (Livorno). [*Vedi* t. XIII, pag. 7]. In memoria di S. M. Umberto I. Livorno, 1900.

Leau, L. (Paris). Une Langue universelle est-elle possible? Paris, 1900.

Lemoine, E. (Paris). [*Vedi* t. XIII, pag. 7]. Comparaison géométrografique de douze constructions déduites de onze solutions d'un même problème. *Assoc. Française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Boulogne-sur-mer, 1899.

Lorenz, L. [*Vedi* t. XIII, pag. 7]. Œuvres scientifiques, revues et annotées par K. Valentiner. Premier fascicule. Copenhague, 1899.

Loria, G. (Genova). [*Vedi* t. XIII, pag. 7]. La storia della Matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario. *Period. di Matem.*, XIV, 1898.

— Le Scienze esatte nell'antica Grecia — Libro III: Il substrato matematico della Filosofia naturale dei Greci. *Mem. Acc. Modena*, XII_2, 1900.

— Le trasfigurazioni di una scienza. Discorso pronunciato per la solenne inaugurazione dell'anno accademico. Genova, 1900.

Macfarlane, A. (Chatham). [*Vedi* t. IX, pag. 5]. The fundamental principles of Algebra. Easton, Pa. 1899.

Manchester, J. E. [Austin, Minn., U. S. A.]. Ueber Singularitäten ebener Kurven Inaug.-Dissert. Tübingen, 1899.

Marangoni, G. B. (Bassano Veneto). Alcune osservazioni sull'Opuscolo « I fenomeni naturali e le rappresentazioni matematiche » del comm. provv. A. M. Bustelli. *La Nostra Scuola*, II, 1899.

Maupin, G. (Paris). [*Vedi* t. XIII, pag. 8]. La Mathématique. — Opinions et curiosités. Paris, 1898.

Mayer, A. (Leipzig). [*Vedi* t. XIII, pag. 8]. Zur Theorie der Bewegung von Punktsystemen unter dem Einfluss von Potentialkräften. *Berichte der mathem.-phys. Classe der Kön. Sächs. Gesellschaft der Wissensch.*, Leipzig, 1899

— Nachtrag zu der Note « Ueber die lebendige der durch plötzliche Stösse, etc. ». *Ibid.*, 1899.

— Ueber die Aufstellung der Differentialgleichung der Bewegung für reibungslose Punktsysteme, die Bedingungsungleichungen unterworfen sind. *Ibid.*, 1899.

— Zur Regulirung der Stösse in reibungslosen Punktsystemen, die dem Zwange von Bedingungsungleichungen unterliegen. *Ibid.*, 1899.

Mayer, Ad. (Leipzig). Die Gleichegewichtsbedingungen reibungsloser Punktsysteme und die verschiedenen Arten des Gleichegewichts. Inaug.-Dissertation, Leipzig, 1899.

Medolaghi, P. (Roma). Sulle superficie che possono generare due famiglie di Lamé con due movimenti diversi. *Rend. Acc. Lincei*, VIII_5, 1899.

Meyer, F. [*Vedi* t. II, pag. 15]. Rapporto sui progressi della Teoria projettiva degl'invarianti nell'ultimo quarto di secolo. Traduzione del Prof. G. Vivanti. *Giorn. di Battaglini*, XXXII-XXXVII, 1894-99.

Michel, F. Recueil de problèmes de géométrie analytique. Paris, 1900.

Montesano, D. (Napoli). [*Vedi* t. VIII, pag. 7]. Una estensione della projettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette. *Annali di Matem.*, I_3, 1898.

— La superficie romana di Steiner. *Rend. Acc. Napoli*, 1899.

Morale, M. (Bagni Canicattini). La rigata razionale d'ordine *n* dello spazio a quattro dimensioni. Palermo, 1899.

— Tre metodi per la costruzione di superficie rigate nello spazio a quattro dimensioni. Palermo, 1899.

Nusl, Fr. (Prague). Prokop Diviš. Vylíčení jeho života a zásluh vědeckých. Praze, 1899.

Ocagne, M. d' (Paris). [*Vedi* t. X, pag. 11]. Traité de Nomographie. Paris, 1899.

Oltramare, G. (Paris). Calcul de généralisation. Paris, 1899.

Pascal, E. (Pavia). [*Vedi* t. IV, pag. 8]. Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche. *Memorie Acc. Lincei*, V_4, 1888.

— Ricerche sugli aggruppamenti formati colle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine. Nota II. *Rend. Acc. Lincei*, I_5, 1892.

— Sugli aggruppamenti tripli di coniche coordinate alla quartica piana. Nota III. *Ibid.*, II_5, 1893.

— Altre ricerche sulla configurazione delle rette situate sulla superficie di 3° ordine. Nota IV. *Rend. Ist. Lomb.*, XXVI, 1893.

— Osservazioni sui gruppi di sostituzioni fra le caratteristiche dispari di genere 3 e di genere 4. *Rend. Acc. Lincei*, II_5, 1893.

— Sulle funzioni σ ellittiche pari. *Rend. Ist. Lomb.*, XXVIII, 1895.

— Teoria delle funzioni ellittiche. Milano, 1896.

— Sopra le relazioni fra i determinanti formati coi medesimi elementi. *Rend. Ist. Lomb.*, XXIX, 1896.

— Su di un teorema del sig Netto relativo ai determinanti e su di un altro teorema ad esso affine. *Rend. Acc. Lincei*, V_5, 1896.

— I Determinanti. Teoria ed applicazioni con tutte le più recenti ricerche. Milano, 1897.

— Calcolo delle variazioni e Calcolo delle differenze finite. (III Parte del Calcolo Infinitesimale). Milano, 1897.

— Repertorio di Matematiche superiori. Vol. I: Analisi. Milano, 1898.

— Pochi cenni su Francesco Brioschi. *Annuario della R. Università di Pavia*, 1898-99.

— Repertorio di Matematiche superiori. Vol. II: Geometria. Milano, 1900.

— Sur une théorie des systèmes d'équations aux différentielles totales de 2ᵉ ordre. *Comptes Rendus*, CXXX, 1900.

— Sulle equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque. *Rend. Ist. Lomb*, XXXIII, 1900.

— Repertoryum Matematyki Wyzszej, przelozyl za upovaznieniem Autora S. Dickstein. Tom I: Analiza. Warszawa, 1900.

— La teoria delle equazioni differenziali totali di 3° ordine. *Rend. Ist. Lomb.*, $XXXIII_2$, 1900.

Pinto, L. (Napoli) [*Vedi* t. IX, pag. 6]. Prof. Eugenio Beltrami. Parole lette dal Socio Segretario. *Rend. Acc. Napoli*, 1900.

Pizzarello, D. (Messina). Sulle funzioni trascendenti intere. Messina, 1900.

Poincaré, H. (Paris). [*Vedi* t. X, pag. 12]. La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes. *Collection Scientia*, Paris, 1899.

— Cinématique et Mécanismes. Potentiel et Mécanique des Fluides. Cours professé à la Sorbonne, et rédigé par A. Guillet. Paris, 1899.

Pringsheim, A. (München). Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse. *Encyklopädie der mathem. Wissensch.* (Burkhardt und Meyer), 1898.

Reina, V. (Roma). [*Vedi* t. XIII, pag. 9) Determinazioni di latitudine e di azimut eseguite nel 1898 nei punti Monte Mario, Monte Cavo, Fiumicino. *R. Commissione Geodet. Ital.*, 1899.

— Determinazione astronomica di latitudine e di azimut eseguita a Monte Pisarello nel 1899. *Rend. Acc. Lincei*, IX_5, 1900.

— Gli strumenti di ottica e di meccanica di precisione all'Esposizione Universale del 1900. Torino, 1900.

Ricci, G. (Padova). [*Vedi* t. XIII, pag. 9]. Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni. *Memorie della Società dei* XL, XII_3, 1899.

— Lezioni di Algebra complementare. Padova, 1900.

Ricci G. e **Levi-Civita, T.** (Padova). Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Math. Ann.*, Bd. LIV, 1900.

Ruffini, F. P. (Bologna). [*Vedi* t. XIII, pag. 10]. Linee radicali e punti radicali. *Rend. Acc. Bologna*, 1899-1900.

Schoute, P. H. (Groningen). [*Vedi* t. V, pag. 8]. La courbe de Jacobi d'un réseau de quadriques. *Bull. Soc. Phys.-Mathém. de Kasan*, IX_2, 1899.

Somigliana, C. (Pavia). [*Vedi* t. IX, pag. 7]. Sulle funzioni reali d'una variabile. *Rend. Acc. Lincei*, $VIII_5$, 1899.

— Considerazioni nelle funzioni ordinate. *Ibid.*, $VIII_5$, 1899.

Studnička, F. J. (Praga). [*Vedi* t. XIII, pag. 10]. Beiträge zur Theorie der cyclischen Determinanten. *Monats. für Math. und Phys*, X, 1899.

— Einige Bemerkungen über die sogenannten Euklidischen Zahlen. *Sitzungsb. k. böhm. Gesellsch. der Wissensch.* 1899.

Tannenberg, W. de. Leçons nouvelles sur les applications géométriques du Calcul différentiel. Paris, 1899.

Teixeira, F. Gomes (Porto) [*Vedi* t. XIII, pag. 10]. Sur les courbes parallèles à l'ellipse. *Mémoires couronnés et autres mémoires, publiés par l'Acad. de Belgique*, LVIII, 1898

Tummarello, A. (Trapani). La geometria della riga. Parte 1ª. Palermo, 1900.

Vailati, G. (Siracusa). [*Vedi* t. XIII, pag. 11]. Alcune osservazioni sulle questioni di parole nella storia della scienza e della cultura. Prolusione. Torino, 1899.

Vecchi, S. (Parma). [*Vedi* t. XI, pag. 91]. Sulle figure complete determinate da un numero qualunque di punti o da un numero qualunque di tangenti di una conica e sulle loro correlative nello spazio. Parma, 1899.

— Saggio di un disegno polarimetrico (Esercizio di Geometria descrittiva). Parma, 1899.

Vivanti, G. (Messina). [*Vedi* t. XIII, pag. 11]. Sull'estensione del metodo d'integrazione di Monge e Ampère. *Rend. Ist. Lomb.*, $XXXII_2$, 1899.

— Sulle funzioni trascendenti intere. *Ibid.*, $XXXII_2$, 1899.

— R. Fricke und F. Klein: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen. [Recenzione]. *Bollett. di Bibliografia*, 1899.

— Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche, tenute nella R. Università di Messina, raccolte dall'Assistente Dr. P. Fulco. Corso dell'anno 1898-99. (Litogr.). Reggio Calabria, 1899.

— É. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles

du 2° ordre à deux variables indépendantes. [Recensione]. *Bullett. di Bibliografia*, 1900.

— Lista bibliografica della teoria degli aggregati 1893-1899. *Bibliotheca Mathematica*, I_3, 1900.

— Lezioni sulla teoria delle funzioni ellittiche tenute nella R. Università di Messina, 1900.

Vries, Jan de (Amsterdam). [*Vedi* t. XI, pag. 91]. On trinodal Quartics. *Ak. van Wetensk.*, Amsterdam, 1899.

— On the orthoptical circles belonging to linear systems of conics. *Ibid.*, 1899.

— On twisted quintics of genus unity. *Ibid.*, 1900.

— On orthogonal comitants. *Ibid.*, 1900.

— Kubische Involutionen 1^er^ und 2^er^ Stufe auf kubischen Raumcurven. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, IV_2.

— La quartique trinodale. *Archives Teyler*, VII_2.

INDICE

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO.

Fine della Parte 2^a del Tomo XIV (1900).

Tipografia Matematica di Palermo
11, via Villareale.